Sopra una classe di equazioni differenziali lineari riducibili.

(*Di* Carlo Bigiavi, *a Pisa*.)

La teoria generale dei punti singolari delle equazioni differenziali lineari, esposta dal Fuchs, ci dà il modo di riconoscere con metodi perfettamente determinati, se una data equazione ammette per integrale generale una funzione uniforme in tutto il piano ed avente un solo punto di singolarità essenziale, che, per mezzo di un cambiamento di variabile, si può sempre supporre trasportato all'infinito. Basta infatti esaminare uno ad uno i punti singolari dell'equazione e verificare se in ciascuno di essi tutti gl'integrali siano finiti e continui, o abbiano tutto al più dei poli, la qual cosa si può fare con operazioni puramente algebriche. Ma, quando invece si tratti di riconoscere se una data equazione ammetta soltanto alcuni integrali particolari uniformi, o più in generale se essa sia riducibile, il solo esame dei suoi punti singolari non è più sufficiente per la risoluzione del problema. Ciò dipende dal fatto che non sappiamo nulla delle modificazioni che subiscono gl'integrali, quando colla variabile si gira attorno a due o a più dei loro punti critici.

Per altro vi sono dei casi particolari nei quali la sola natura dei punti singolari è un dato sufficiente per stabilire l'esistenza di alcuni integrali uniformi. Così, ad esempio, consideriamo un'equazione del terz'ordine avente in tutt'il piano tre soli punti a, b, c critici per gl'integrali, tali però che esistano le equazioni determinanti relative ad essi, e supponiamo che nelle vicinanze di ognuno dei punti a, b, c vi siano due integrali monodromi distinti. Con questi dati si può subito stabilire che l'equazione possiede un integrale uniforme in tutto il piano.

Infatti siano y_1, y_2 due integrali distinti e monodromi nell'intorno di a, e sia y_3 un terzo integrale definito nelle vicinanze di a, diverso da y_1, y_2

e da qualunque loro combinazione lineare a coefficienti costanti. Evidentemente la funzione y_3 non riprende lo stesso valore, quando colla variabile si gira attorno ad a. Siano poi u, v altri due integrali distinti e monodromi nelle vicinanze di b; avremo allora:

$$u = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3$$

$$v = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3,$$

ove le α e β sono costanti determinate. Da queste relazioni si deduce che la funzione:

$$\beta_3 u - \alpha_3 v$$

è un integrale che si mantiene monodromo nelle vicinanze di a e di b, e che quindi è uniforme in tutto il piano.

Si potrebbero citare vari altri esempi analoghi a questo; ma le equazioni, che in tal modo si vengono a considerare, sono troppo semplici perchè di esse si debba trattare in esteso. Se invece consideriamo le equazioni a coefficienti doppiamente periodici, troviamo un caso assai più interessante nel quale si può dimostrare che la sola natura dei punti singolari basta per stabilire che queste equazioni sono riducibili, ed ammettono un gruppo d'integrali uniformi. Questo caso si presenta per quelle equazioni a coefficienti ellittici d'ordine n che hanno entro il parallelogrammo dei periodi un solo punto critico per gl'integrali, tale che le radici della determinante relativa ad esso siano numeri interi, e che esistano $n-1$ integrali distinti e privi di logaritmi nelle sue vicinanze.

Parendomi che queste equazioni a coefficienti ellittici potessero offrire un certo interesse, mi sono proposto di farne un breve studio, tanto più che la proprietà che esse hanno di possedere alcuni integrali uniformi non si deduce più in modo così semplice come nell'esempio precedente.

Ho diviso il mio lavoro in quattro parti; nella prima, dopo avere ricordato brevemente alcuni dei risultati fondamentali ottenuti dal Fuchs sulle equazioni lineari, mi sono fermato in modo speciale sulla ricerca delle relazioni che esprimono la condizione necessaria e sufficiente affinchè in un gruppo d'integrali ve ne siano alcuni privi di logaritmi; nella seconda ho esposto alcuni teoremi generali sulle equazioni a coefficienti ellittici riducibili; nella terza poi ho preso a considerare quelle equazioni lineari che mi sono proposto di studiare, ed ho dimostrato che esse ammettono sempre un gruppo di integrali uniformi; finalmente nell'ultima ho citato alcuni esempi, limitandomi per altro alle sole equazioni del secondo e terz'ordine.

I.

1. Considieriamo l'equazione differenziale lineare d'ordine n:

$$\Phi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0$$

pei valori della x interni ad un certo campo C, nel quale le funzioni p_1, $p_2, \dots p_n$ si suppongono uniformi, e proponiamoci di studiarne gl'integrali nelle vicinanze di un punto a interno a C.

Può darsi che i coefficienti p si mantengano finiti per $x = a$; in tal caso risulta da un teorema di Cauchy che l'integrale generale è una funzione uniforme nelle vicinanze di a, che si mantiene finita e differente da zero in questo punto. Si può formare questa funzione con n integrali particolari:

$$f_0(x), \qquad f_1(x), \dots \qquad f_{n-1}(x),$$

tale che $f_i(x)$ sia uniforme nelle vicinanze di a, ed abbia in questo punto un infinitesimo d'ordine i.

Può ancora accadere che alcuni dei coefficienti p divengano infiniti per $x = a$. Si dice allora che a è un punto singolare dell'equazione.

In questo secondo caso il Fuchs ha studiato il modo di comportarsi degli integrali nelle vicinanze di a, ed ha dato le regole per costruirli effettivamente quando a è un polo pei coefficienti p tale che le funzioni:

$$(x-a)p_1, \qquad (x-a)^2 p_2, \dots \qquad (x-a)^n p_n$$

si mantengano finite per $x = a$.

Indichiamo con b_i il limite dell'espressione $(x-a)^i p_i$ per $x = a$, e consideriamo l'equazione algebrica di grado n nella quantità incognita r, espressa da:

$$F(r) = r(r-1)\dots(r-n+1) + r(r-1)\dots(r-n+2)b_1 + \\ + \cdots + r b_{n-1} + b_n = 0.$$

Essa si chiama l'equazione determinante relativa ad a di $\Phi(y) = 0$. Il risultato importante ottenuto dal Fuchs consiste in ciò che ad ogni radice di $F(r) = 0$ corrisponde nelle vicinanze di a un integrale particolare di $\Phi(y) = 0$, e che gli n integrali che si hanno in tal modo appartengono ad un sistema fondamentale.

Si distribuiscano le n radici di $F(r) = 0$ in vari gruppi, tali che le radici di ogni gruppo siano a differenze intere, ed in ogni gruppo si dispongano le radici in modo che le loro parti reali non vadano crescendo. Allora, se:

$$r_1, \quad r_2, \ldots \quad r_\lambda$$

è un gruppo di λ radici, si ha che i λ integrali ad esse corrispondenti possono nelle vicinanze di a essere rappresentati dalle espressioni:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = (x-a)^{r_1}\varphi_{1,1} \\ y_2 = (x-a)^{r_2}[\varphi_{2,1} + \varphi_{2,2}\log(x-a)] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_h = (x-a)^{r_h}[\varphi_{h,1} + \varphi_{h,2}\log(x-a) + \cdots + \varphi_{h,h}\log^{h-1}(x-a)] \\ \cdot\;\cdot \\ y_\lambda = (x-a)^{r_\lambda}[\varphi_{\lambda,1} + \varphi_{\lambda,2}\log(x-a) + \cdots + \varphi_{\lambda,\lambda}\log^{\lambda-1}(x-a)], \end{array}\right\} \quad (1)$$

ove le φ sono funzioni uniformi ed intere nelle vicinanze di a. Considerando i differenti gruppi di radici possiamo conoscere in qual modo nelle vicinanze di a si comportano n integrali distinti dell'equazione.

Esaminiamo ora in modo speciale il gruppo d'integrali (1) corrispondente al gruppo di radici $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$, e ricordiamo alcune delle principali proprietà delle funzioni φ che entrano nella costituzione di quest'integrali. Rammentiamo prima di tutto che le funzioni:

$$\varphi_{h,1}, \quad \varphi_{h,2}, \ldots \quad \varphi_{h,h}$$

relative ad un medesimo integrale y_h, essendo h uno dei numeri interi $1, 2, \ldots \lambda$, non possono annullarsi tutte per $x = a$; ma una almeno deve mantenersi differente da zero in questo punto. In tal modo l'integrale y_h moltiplicato per $(x-a)^{-r_h}$ o è finito e differente da zero per $x = a$, o diviene in questo punto infinito di un ordine logaritmico. Si esprime questo fatto dicendo che l'integrale y_h appartiene all'esponente r_h.

Di tutte le funzioni φ quelle che hanno il secondo indice eguale all'unità sono le sole indipendenti, e le rimanenti φ si esprimono per mezzo di queste, quando però si escluda $\varphi_{\lambda,1}$; si ha cioè il seguente risultato: le funzioni:

$$(x-a)^{r_h}\varphi_{h,2}, \quad (x-a)^{r_h}\varphi_{h,3}, \ldots \quad (x-a)^{r_h}\varphi_{h,h}$$

relative al solito integrale y_h sono espressioni lineari a coefficienti costanti di:

$$(x-a)^{r_1}\varphi_{1,1}, \quad (x-a)^{r_2}\varphi_{2,1}, \ldots \quad (x-a)^{r_{h-1}}\varphi_{h-1,1}.$$

In particolare $(x-a)^{r_h}\varphi_{h,h}$ differisce da $(x-a)^{r_1}\varphi_{1,1}$ solo per un fattore costante.

Se i coefficienti costanti che entrano nella costituzione delle espressioni $(x-a)^{r_h}\varphi_{h,2}$, $(x-a)^{r_h}\varphi_{h,3}, \dots$ sono tutti nulli, l'integrale y_h non contiene logaritmi, ed è della forma $(x-a)^{r_h}\varphi_{h,1}$.

Possiamo sostituire altri integrali $z_1, z_2, \dots z_\lambda$ a quelli del gruppo (1) formandoli in modo che si abbia:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= c_{1,1}y_1 \\
z_2 &= c_{2,1}y_1 + c_{2,2}y_2 \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
z_h &= c_{h,1}y_1 + c_{h,2}y_2 + \cdots + c_{h,h}y_h \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
z_\lambda &= c_{\lambda,1}y_1 + c_{\lambda,2}y_2 + \cdots + c_{\lambda,\lambda}y_\lambda,
\end{aligned}
$$

ove le c sono costanti arbitrarie, colla condizione però che quelle che hanno i due indici eguali siano sempre differenti da zero. Gl'integrali z hanno nelle vicinanze di a espressioni analoghe a quelle degl'integrali y, e le funzioni φ relative ad essi godono pure di tutte le precedenti proprietà.

Avanti di lasciare queste considerazioni generali ricordiamo alcune proprietà delle funzioni che nelle vicinanze di a hanno una forma analoga a quella degl'integrali del gruppo (1). Sia Z una di tali funzioni che appartenga all'esponente r, cioè si abbia:

$$Z = (x-a)^r[\varphi_0 + \varphi_1\log(x-a) + \cdots + \varphi_k\log^k(x-a)],$$

ove le φ sono funzioni uniformi ed intere nell'intorno di a, e che non si annullano tutte per $x=a$.

Si dimostra facilmente che $\frac{dZ}{dx}$ è un'espressione di una forma analoga a quella di Z che appartiene all'esponente $r-1$, quando però non sia $r=0$, e per $x=a$ non si annullino tutte le funzioni φ all'infuori di φ_0. In questo caso speciale $\frac{dZ}{dx}$ appartiene essa pure all'esponente zero, e se $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_k$ divengono per $x=a$ infinitesime d'ordine superiore al primo, e $\frac{d\varphi_0}{dx}$ si annulla anch'essa per $x=a$, allora $\frac{dZ}{dx}$ appartiene a un esponente intero e positivo.

Supponiamo ora che r sia un numero intero positivo o nullo, e che la φ_k divenga in a infinitesima d'ordine s. Avremo allora:

$$\varphi_k = (x-a)^s \psi,$$

essendo ψ una funzione uniforme ed intera nelle vicinanze di a, e che non si annulla per $x = a$. La Z contiene quindi il termine:

$$(x-a)^{r+s} \psi \log^k (x-a),$$

e la sua derivata d'ordine $r+s$ l'altro:

$$1 \times 2 \times 3 \ldots (r+s) \psi \log^k (x-a).$$

Tutti i rimanenti termini, che entrano in $\frac{d^{r+s} Z}{d x^{r+s}}$, e che contengono $\log^k (x-a)$, hanno il coefficiente di questa potenza di logaritmo che si annulla per $x = a$. Sicchè:

$$\frac{d^{r+s} Z}{d x^{r+s}}$$

contiene un termine della forma $\psi_k \log^k (x-a)$, ove ψ_k è una funzione uniforme ed intera nelle vicinanze di a, e che non si annulla in questo punto. Di qui risulta che $\frac{d^{r+s} Z}{d x^{r+s}}$ o appartiene a un esponente intero e negativo, o appartiene all'esponente zero. Per conseguenza:

$$\frac{d^{r+s+1} Z}{d x^{r+s+1}}$$

viene sempre ad appartenere a un esponente intero e negativo, perchè, anche quando $\frac{d^{r+s} Z}{d x^{r+s}}$ appartiene all'esponente zero, non siamo nel caso di eccezione accennato precedentemente, e ciò a causa del termine $\psi_k \log^k (x-a)$.

2. Questi risultati sono dovuti al Fuchs, il quale se ne è servito per riconoscere in quale caso tutti gl'integrali del gruppo (1) siano privi di logaritmi. Noi invece li applicheremo alla ricerca delle condizioni che si devono avere affinchè soltanto alcuni integrali del gruppo non contengano logaritmi.

Dividiamo tutti gl'integrali del gruppo (1) per $(x-a)^{r_\lambda}$, ed eseguiamo le derivate d'ordine $r_1 - r_\lambda + 1$ delle espressioni che si ottengono. Allora si vede facilmente che le derivate provenienti da integrali che contengono logaritmi devono appartenere ad esponenti negativi. Consideriamo infatti l'integrale y_h, il quale è dato da:

$$y_h = (x-a)^{r_h}[\varphi_{h,1} + \varphi_{h,2}\log(x-a) + \cdots + \varphi_{h,h}\log^{h-1}(x-a)].$$

Supponiamo per più generalità che le funzioni $\varphi_{h,h}, \varphi_{h,h-1}, \dots \varphi_{h,k+1}$, essendo $k \leq h$, risultino identicamente nulle, e che $\varphi_{h,k}$ sia la prima delle φ di y_h che non si annulla identicamente. Da una proprietà delle φ, che già abbiamo ricordato, risulta che $(x-a)^{r_h}\varphi_{h,k}$ è un'espressione lineare a coefficienti costanti di:

$$(x-a)^{r_1}\varphi_{1,1}, \qquad (x-a)^{r_2}\varphi_{2,1}, \dots \qquad (x-a)^{r_{h-1}}\varphi_{h-1,1}.$$

Sicchè $(x-a)^{r_h}\varphi_{h,k}$ è una funzione che si può mettere nelle vicinanze di a anche sotto l'altra forma $(x-a)^{m+r_\lambda}\theta$, ove m è uno dei numeri interi $r_1 - r_\lambda$, $r_2 - r_\lambda, \dots\ r_{h-1} - r_\lambda$ e θ una funzione uniforme nelle vicinanze di a che non si annulla per $x = a$.

Dividendo y_h per $(x-a)^{r_\lambda}$, si ottiene l'espressione:

$$(x-a)^{r_h - r_\lambda}[\varphi_{h,1} + \varphi_{h,2}\log(x-a) + \cdots + \varphi_{h,k}\log^{k-1}(x-a)],$$

che si può anche mettere sotto la forma:

$$(x-a)^{r_h - r_\lambda}[\varphi_{h,1} + \varphi_{h,2}\log(x-a) + \cdots + \varphi_{h,k-1}\log^{k-2}(x-a)] +$$
$$+ (x-a)^m \theta \log^{k-1}(x-a).$$

Dalle osservazioni fatte precedentemente risulta che la derivata d'ordine $m+1$ di questa espressione deve appartenere a un esponente intero e negativo, e lo stesso deve quindi accadere per la derivata d'ordine $r_1 - r_\lambda + 1$, essendo questo numero eguale o superiore a $m+1$.

Può darsi che fra gl'integrali del gruppo (1) oltre all'integrale y_1 ve ne siano ancora altri senza logaritmi, come pure può accadere più in generale che si possano determinare le costanti $c_{1,1}, c_{1,2}, \dots$ che servono per la formazione degl'integrali Z, in modo che alcuni di quest'integrali non contengano logaritmi.

Ci si può accertare di questo nel seguente modo: si faccia nel primo membro di $\Phi(y) = 0$:

$$y = (x-a)^{r_\lambda} u,$$

e si divida il risultato che si ottiene per $(x-a)^{r_\lambda}$. Si ha in tal modo un'equazione in u d'ordine n, che si può indicare con:

$$\Phi_1(u) = 0.$$

La sua determinante relativa ad a possiede l'unico gruppo di radici intere:

$$r_1 - r_\lambda, \qquad r_2 - r_\lambda, \ldots \qquad r_{\lambda-1} - r_\lambda, \qquad 0.$$

Si costruisca poi l'equazione:

$$\Omega(t) = \frac{d^n t}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} t}{dx^{n-1}} + \cdots + q_n t = 0,$$

tale che la sua funzione incognita sia data da:

$$t = \frac{d^{r_1 - r_\lambda + 1} u}{dx^{r_1 - r_\lambda + 1}}.$$

La determinante di questa nuova equazione relativa ad a deve avere un unico gruppo di λ radici intere. È facile vedere che ad ogni radice positiva di questo gruppo corrisponde per l'equazione primitiva $\Phi(y) = 0$ un integrale privo di logaritmi. Tutti quest'integrali, che si possono ottenere combinando fra loro quelli del gruppo (1) in modo conveniente, non sono legati da alcuna relazione lineare a coefficienti costanti.

Può ancora accadere che l'equazione $\Omega(t) = 0$ sia di ordine $m < n$. In tal caso, se ricordiamo che gl'integrali di $\Omega(t) = 0$ si possono ottenere eseguendo le derivate d'ordine $r_1 - r_\lambda + 1$ degl'integrali di $\Phi_1(u) = 0$, si vede subito che fra gl'integrali di quest'ultima equazione vi devono essere $i = n - m$ polinomi distinti interi in $x - a$ e di grado inferiore a $r_1 - r_\lambda + 1$. Questi polinomi provengono da altrettanti integrali di $\Phi(y) = 0$ privi di logaritmi nelle vicinanze di a, ed appartengono necessariamente ad esponenti interi e positivi relativamente a questo punto; sicchè, quando siano scelti in modo conveniente, devono corrispondere a i delle radici intere $r_1 - r_\lambda$, $r_2 - r_\lambda, \ldots$ $r_{\lambda-1} - r_\lambda, 0$, e ciò perchè sono integrali di $\Phi_1(u) = 0$. Quindi deve essere $\lambda \geqq i$, e la determinante di $\Omega(t) = 0$ relativa ad a deve aver soltanto $\lambda - i$ radici intere. Ad ognuna di queste radici corrisponde sempre un integrale di $\Phi(y) = 0$ privo di logaritmi nell'intorno di a; sicchè, considerando il gruppo di radici intere della determinante relativa ad a di $\Omega(t) = 0$, se accade che fra queste radici ve ne siano soltanto $\mu \leqq \lambda - i$ negative, si può concludere che la $\Phi(y) = 0$ ha $l = \lambda - \mu$ integrali privi di logaritmi nelle vicinanze di a, che si possono ottenere combinando fra loro in modo conveniente quelli del gruppo (1).

Queste considerazioni sono pure dovute al Fuchs, il quale peraltro ha tenuto conto del solo caso che sia $\mu = 0$, cioè che tutti gl'integrali del gruppo siano privi di logaritmi.

3. Ci proponiamo ora di esporre un altro metodo più semplice e più pratico per riconoscere se, combinando fra loro gl'integrali del gruppo (1), si possano ottenere alcuni integrali di $\Phi(y) = 0$ privi di logaritmi.

Dobbiamo per questo considerare i coefficienti $p_1, p_2, \ldots p_n$ dell'equazione $\Phi(y) = 0$ nelle vicinanze di a e svilupparli in serie ordinate per le potenze intere e crescenti di $x - a$. Ciò premesso, essendo r, α_0, α_1, $\alpha_2, \ldots$ una successione di quantità costanti scelte in modo qualunque, si costruisca la serie:

$$v = \alpha_0 (x - a)^r + \alpha_1 (x - a)^{r+1} + \alpha_2 (x - a)^{r+2} + \cdots,$$

che si può considerare come il prodotto di $(x - a)^r$ per i termini di un'altra serie w espressa da:

$$w = \alpha_0 + \alpha_1 (x - a) + \alpha_2 (x - a)^2 + \cdots.$$

Finchè le α restano indeterminate non possiamo dire nulla riguardo alla convergenza di queste serie nelle vicinanze di a. Osserviamo soltanto che, se una di esse è convergente, lo è anche l'altra. In tal caso si ha la formula:

$$v = (x - a)^r w.$$

Si può supporre che la α_0 sia sempre differente da zero, perchè, se fosse $\alpha_0 = 0$ ed α_i fosse la prima delle costanti α differente da zero, si potrebbero considerare le quantità:

$$r + i, \qquad \alpha_i, \qquad \alpha_{i+1}, \ldots$$

invece delle altre:

$$r, \qquad \alpha_0, \qquad \alpha_1, \ldots.$$

Sebbene non si sappia se la serie v sia convergente, pure diremo sempre che essa appartiene all'esponente r relativamente al punto a.

Si sostituisca ad y nel primo membro dell'equazione $\Phi(y) = 0$ la serie v. Si ottiene in tal modo la nuova serie:

$$\Phi(v) = A_0 (x - a)^{r-n} + A_1 (x - a)^{r-n+1} + \cdots,$$

che non sappiamo se sia convergente nelle vicinanze di a.

È facile vedere che si ha:

$$A_0 = \alpha_0 F(r);$$

epperò l'espressione A_0 risulta nulla solo quando r è una radice della determinante relativa ad a di $\Phi(y) = 0$.

Si tratta ora di dimostrare che, quando i coefficienti A di $\Phi(v)$ sono identicamente nulli, le due serie v e w sono convergenti nelle vicinanze di a, e v rappresenta un'integrale dell'equazione.

Se si fa $r = r_1$, e si dà ad α_0 un valore qualunque, si possono sempre determinare le rimanenti quantità $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ che entrano in v, in modo che la serie $\Phi(v)$ risulti a coefficienti nulli. Questa determinazione non si può fare che in un modo solo, e di ciò ci si può accertare facilmente. Il Fuchs ha dimostrato che la serie v che così si ottiene è convergente, e rappresenta un integrale dell'equazione. Essa differisce dal primo integrale del gruppo (1) solo per un fattore costante dipendente dal valore di α_0.

Può darsi ancora che, eguagliando r ad altre radici del gruppo $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$, si possano ottenere altre serie analoghe alla v e tali che, sostituite ad y in $\Phi(y) = 0$, diano origine a serie a coefficienti nulli. Consideriamo tutte queste serie assieme a quella corrispondente a $r = r_1$; indichiamole con v_1, $v_2, \ldots v_l$, e supponiamo che esse siano linearmente indipendenti, cioè che non si possano determinare delle costanti d tali che la serie:

$$d_1 v_1 + d_2 v_2 + \cdots + d_l v_l$$

risulti a coefficienti nulli.

Ognuna delle serie v appartiene a una delle radici $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$, e, se due serie u_h e u_k appartengono alla medesima radice r_h, si può a una di esse, u_k ad es., sostituire l'altra serie $u_k + \lambda u_h$, ove λ è una costante tale che in $u_k + \lambda u_h$ venga a mancare il termine in $(x-a)^{r_h}$. Questa serie, che si può prendere invece di u_k, comincia con un termine contenente ad es. $(x-a)^{r_k}$, essendo r_k un'altra radice del gruppo differente da r_h. Ripetendo una tale operazione un numero finito di volte potremo ottenere le serie v_1, $v_2, \ldots v_l$, in modo che le radici alle quali appartengono siano tutte differenti.

Consideriamo le altre serie $u_1, u_2, \ldots u_l$ tali che i loro termini differiscano da quelli delle corrispondenti v per il fattore $(x-a)^{r_\lambda}$. Queste nuove serie, quando vengano sostituite a u in $\Phi_1(u)$, danno origine ad altrettante serie a coefficienti nulli.

Sia t_h la serie che si ottiene derivando ogni termine di u_h $r_1 - r_\lambda + 1$ volte. È chiaro che le serie $t_1, t_2, \ldots t_l$ sono tali che, sostituite a t in $\Omega(t)$, danno origine a serie a coefficienti nulli.

Può darsi che di queste serie t ve ne siano soltanto $l-i$, essendo $i \leqq l$, linearmente indipendenti, che potremo determinare in modo che ognuna di esse cominci con una potenza differente di $x-a$. Indichiamo queste $l-i$

serie con $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{l-i}$, e sia s_h l'esponente della potenza di $x-a$ nel primo termine di θ_h. I numeri interi e positivi $s_1, s_2, \ldots s_{l-i}$ sono radici della determinante di $\Omega(t)=0$ relativa ad a.

È facile vedere che, combinando linearmente le serie u, si ottengono i polinomi distinti interi in $x-a$ e di grado inferiore a $r_1 - r_\lambda + 1$, i quali si possono sempre scegliere in modo che appartengano a esponenti differenti. Anzi si potrà supporre di avere scelto le serie $v_1, v_2, \ldots v_l$ in modo che le radici alle quali appartengono siano tutte differenti, e che $v_1, v_2, \ldots v_i$ siano espressioni a un numero finito di termini, tali che divise per $(x-a)^{r_\lambda}$ diano origine agli i polinomi.

L'equazione $\Omega(t)=0$ è soltanto di grado $m=n-i$, e la sua determinante relativa ad a contiene un gruppo di $\lambda - i$ radici intere, fra le quali ve ne sono almeno $l-i$ positive.

Da tutto ciò risulta che l'equazione primitiva $\Phi(y)=0$ deve avere almeno l integrali distinti privi di logaritmi nelle vicinanze di a e appartenenti relativamente a questo punto a radici del gruppo $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$. Difatti i di quest'integrali sono le espressioni $v_1, v_2, \ldots v_i$ che hanno un numero finito di termini, ed altri $l-i$ integrali sono quelli che devono corrispondere alle $l-i$ radici intere e positive $s_1, s_2, \ldots s_{l-i}$ della determinante relativa ad a di $\Omega(t)=0$. Ma questi $l-i$ integrali devono essere serie analoghe alle v, tali che, sostituite ad y in $\Phi(y)$, diano origine ad altrettante serie a coefficienti nulli. Epperò queste serie non possono essere che combinazioni lineari a coefficienti costanti di $v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots v_l$; sicchè non se ne possono determinare che $l-i$ distinte. Quindi gl'integrali privi di logaritmi che si ottengono da quelli del gruppo (1) sono soltanto l, e le radici intere e positive della determinante relativa ad a di $\Omega(t)=0$ sono soltanto $l-i$.

Se vogliamo che quest'integrali di $\Phi(y)=0$ appartengano a radici differenti, potremo prendere per rappresentarli le serie $v_1, v_2, \ldots v_l$, che, per quanto abbiamo già detto, devono essere convergenti nelle vicinanze di a.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

Essendo data un'equazione differenziale lineare:

$$\Phi(y)=0,$$

avente un punto singolare a, tale però che esista la determinante relativa ad esso, ogni serie v della forma:

$$v=\alpha_0(x-a)^m+\alpha_1(x-a)^{m+1}+\cdots$$

è convergente, e rappresenta un integrale dell'equazione, quando è tale che, *sostituita ad y in $\Phi(y)$, dia origine nelle vicinanze di a ad una serie procedente secondo le potenze intere e crescenti di $x - a$ e a coefficienti nulli.*

4. Questo teorema ci mostra che, affinchè fra gl'integrali del gruppo (1) oltre ad y_1 si possano determinare altri integrali privi di logaritmi nelle vicinanze di a, bisogna che esistano delle relazioni fra i primi coefficienti degli sviluppi in serie ordinate per le potenze intere e crescenti di $x - a$ delle funzioni $p_1, p_2, \ldots p_n$.

Vediamo di determinare queste relazioni nel caso che tutti gl'integrali del gruppo (1) siano privi di logaritmi, perchè da queste relazioni potremo facilmente ottenere quelle che si devono avere, affinchè dal gruppo (1) si possano ottenere soltanto $\lambda - 1$ integrali che non contengano logaritmi.

Per trovare le relazioni, che cerchiamo, supponiamo che i λ integrali del gruppo (1) siano privi di logaritmi. Essi allora saranno rappresentati da λ serie appartenenti alle radici $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$. Per un'osservazione già fatta sappiamo che si possono sostituire ad essi altri integrali, tali che appartengano tutti ad esponenti differenti; ma questi esponenti devono essere sempre r_1, $r_2, \ldots r_\lambda$; sicchè si ha per prima condizione che le radici del gruppo r_1, $r_2, \ldots r_\lambda$ devono essere tutte differenti.

Si ponga:

$$r_\lambda = s, \qquad r_{\lambda-1} = s + m_1, \ldots \qquad r_2 = s + m_{\lambda-2}, \qquad r_1 = s + m_{\lambda-1},$$

essendo:

$$m_1, \qquad m_2, \ldots \qquad m_{\lambda-1}$$

numeri interi positivi e crescenti.

Se consideriamo gl'integrali del gruppo (1) in ordine inverso, e li indichiamo con $v_1, v_2, \ldots v_\lambda$, avremo per essi nell'intorno di a:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= (x-a)^s \sum_0^\infty{}_l\, \alpha_{1,\,l}(x-a)^l \\ v_2 &= (x-a)^{s+m_1} \sum_0^\infty{}_l\, \alpha_{2,\,m_1+l}(x-a)^l \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_\lambda &= (x-a)^{s+m_{\lambda-1}} \sum_0^\infty{}_l\, \alpha_{\lambda,\, m_{\lambda-1}+l}(x-a)^l, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

essendo le α quantità determinate ed in particolare:

$$\alpha_{1,1}, \qquad \alpha_{2,m_1}, \qquad \alpha_{3,m_2}, \ldots \qquad \alpha_{\lambda,m_{\lambda-1}}$$

differenti da zero.

La $\Phi(y) = 0$ ha quindi un integrale particolare con λ costanti arbitrarie $c_1, c_2, \ldots c_\lambda$ espresso da:

$$y = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_\lambda v_\lambda,$$

il quale nelle vicinanze di a può essere rappresentato dalla serie:

$$y = (x-a)^s \sum_0^\infty {}_l\, \gamma_l (x-a)^l \tag{3}$$

essendo:

$$\left.\begin{array}{l}
\gamma_0 = c_1 \alpha_{1,0}, \qquad \gamma_1 = c_1 \alpha_{1,1}, \ldots \qquad \gamma_{m_1-1} = c_1 \alpha_{1,m_1-1} \\
\gamma_{m_1} \;\; = c_1 \alpha_{1,m_1} + c_2 \alpha_{2\,m_1} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\gamma_{m_2-1} = c_1 \alpha_{1\,m_2-1} + c_2 \alpha_{2,m_2-1} \\
\gamma_{m_2} \;\; = c_1 \alpha_{1\,m_2} + c_2 \alpha_{2,m_2} + c_3 \alpha_{3,m_2} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\gamma_{m_{\lambda-1}} = c_1 \alpha_{1,m_{\lambda-1}} + c_2 \alpha_{2,m_{\lambda-1}} + \cdots + c_{\lambda-1} \alpha_{\lambda-1,m_{\lambda-1}} + c_\lambda \alpha_{\lambda,m_{\lambda-1}}.
\end{array}\right\} \tag{4}$$

La prima, la $(m_1 + 1)^{\text{esima}}, \ldots$ la $(m_{\lambda-1} + 1)^{\text{esima}}$ di queste relazioni ci permettono di esprimere le c in funzione di:

$$\gamma_0, \qquad \gamma_{m_1}, \ldots \qquad \gamma_{m_{\lambda-1}},$$

che possono quindi prendersi per le λ costanti arbitrarie dell'integrale y. Sostituendo questi valori delle c nelle espressioni delle rimanenti γ, si ha che le:

$$\gamma_1, \qquad \gamma_2, \ldots \qquad \gamma_{m_1-1}$$

contengono la sola γ_0, e le:

$$\gamma_{m_1+1}, \qquad \gamma_{m_1+2}, \ldots \qquad \gamma_{m_2-1}$$

contengono γ_0 e γ_{m_1}, ecc.; in generale si può dire che ogni γ dipende dalle sole γ arbitrarie che la precedono.

Per trovare ora effettivamente le espressioni che ci dànno i valori delle γ in funzione di quelle arbitrarie, abbiamo bisogno degli sviluppi in serie secondo le potenze intere e crescenti di $x - a$ dei coefficienti $p_1, p_2, \ldots p_n$ di $\Phi(y) = 0$. Queste serie, che devono essere convergenti nelle vicinanze di a, sono della forma:

$$p_h = \frac{1}{(x-a)^h} \sum_0^\infty {}_l \, p_{h,l}(x-a)^l,$$

ove h è uno dei numeri intèri $1, 2, \ldots n$.

Si consideri l'espressione:

$$\Phi([x-a]^h),$$

la quale nell'intorno di a potrà mettersi sotto la forma:

$$\Phi([x-a]^h) = \sum_0^\infty {}_l \, \varphi_l(h)(x-a)^{h-n+l},$$

essendo:

$$\varphi_0(h) = h(h-1)\ldots(h-n+1) + h(h-1)\ldots(h-n+2)p_{1,0} + \\ + \cdots + h(h-1)p_{n-2,0} + hp_{n-1,0} + p_{n,0}$$

$$\varphi_l(h) = h(h-1)\ldots(h-n+2)p_{1,l} + \\ + \cdots + h(h-1)p_{n-2,l} + hp_{n-1,l} + p_{n,l} = 0.$$

La $\varphi_0(h)$ è il primo membro $F(h)$ della determinante di $\Phi(y) = 0$, nel quale la quantità incognita r è sostituita da h. Ricordando che la serie (3) posta in luogo di y nell'equazione la verifica qualunque siano i valori di:

$$\gamma_0, \quad \gamma_{m_1}, \quad \gamma_{m_2}, \ldots \quad \gamma_{m_{\lambda-1}},$$

abbiamo le relazioni:

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi_1(s)\gamma_0 + \varphi_0(s+1)\gamma_1 = 0 \\
\varphi_2(s)\gamma_0 + \varphi_1(s+1)\gamma_1 + \varphi_0(s+2)\gamma_2 = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_{m_k-1}(s)\gamma_0 + \varphi_{m_k-2}(s+1)\gamma_1 + \\
\qquad + \cdots + \varphi_1(s+m_k-2)\gamma_{m_k-2} + \varphi_0(s+m_k-1)\gamma_{m_k-1} = 0 \\
\varphi_{m_k}(s)\gamma_0 + \varphi_{m_k-1}(s+1)\gamma_1 + \\
\qquad + \cdots + \varphi_1(s+m_k-1)\gamma_{m_k-1} = 0 \\
\varphi_{m_k+1}(s)\gamma_0 + \varphi_{m_k}(s+1)\gamma_1 + \\
\qquad + \cdots + \varphi_1(s+m_k)\gamma_{m_k} + \varphi_0(s+m_k+1)\gamma_{m_k+1} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \quad (5)$$

essendo k uno dei numeri interi 1, 2,... $\lambda - 1$. Manca la relazione colla sola γ_0, nella m_1^{esima} non vi è il termine con γ_{m_1}, nella m_2^{esima} quello con γ_{m_2} e finalmente nella $m_{\lambda-1}^{\text{esima}}$ quello con $\gamma_{m_{\lambda-1}}$, e ciò perchè:

$$\varphi_0(s) = \varphi_0(s + m_1) = \cdots = \varphi_0(s + m_{\lambda-1}) = 0,$$

essendo:

$$s, \qquad s + m_1, \ldots \qquad s + m_{\lambda-1}$$

le radici della determinante dell'equazione.

Le prime m_1 delle (5) devono essere soddisfatte qualunque sia il valore assegnato a γ_0; perciò il determinante formato coi coefficienti delle γ di queste m_1 relazioni deve essere identicamente nullo. Si ha così una prima condizione che potremo indicare con

$$D_{1,2} = 0.$$

Ricavando i valori di

$$\gamma_1, \qquad \gamma_2, \ldots \qquad \gamma_{m_1-1}$$

in funzione di γ_0 dalle m_1 eguaglianze considerate, e sostituendoli nelle $m_2 - m_1$ delle (5) che vanno dalla m_1^{esima} alla m_2^{esima}, si vede che queste devono essere soddisfatte qualunque siano γ_0, γ_{m_1}; epperò dovranno risultare nulli i due determinanti formati coi coefficienti di:

$$\gamma_0, \qquad \gamma_{m_1+1}, \ldots \qquad \gamma_{m_2-1}$$

l'uno e di:

$$\gamma_{m_1}, \qquad \gamma_{m_1+1}, \ldots \qquad \gamma_{m_2-1}$$

l'altro. Si hanno così due altre condizioni che potremo indicare con

$$D_{1,3} = 0, \qquad D_{2,3} = 0,$$

e seguitando in questo modo si ottengono le $\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$ relazioni:

$$\left.\begin{array}{llll}
D_{1,2} = 0 & & & \\
D_{1,3} = 0, & D_{2,3} = 0 & & \\
D_{1,4} = 0, & D_{2,4} = 0, & D_{3,4} = 0 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots, & \\
D_{1,\lambda} = 0, & D_{2,\lambda} = 0, & D_{3,\lambda} = 0, \ldots & D_{\lambda-1,\lambda} = 0.
\end{array}\right\} \quad (6)$$

Queste relazioni esprimono la condizione necessaria affinchè la $\Phi(y) = 0$ abbia un integrale y con λ costanti arbitrarie, il quale nell'intorno di a sia espresso dalla (3); ma dai risultati ottenuti nel n.° 3 si deduce che esse esprimono ancora la condizione sufficiente.

5. Ricordiamo ora quali altre relazioni devono essere sostituite alle (6), affinchè dagl'integrali del gruppo (1) si possano ottenere soltanto $\lambda - 1$ integrali senza logaritmi. Partiamo dall'ipotesi che esistano questi $\lambda - 1$ integrali privi di logaritmi, e supponiamo che appartengano rispettivamente agli esponenti:

$$r_\lambda, \quad r_{\lambda-1}, \ldots \quad r_{\lambda-h+1}, \quad r_{\lambda-h-1}, \ldots \quad r_1.$$

Questi $\lambda - 1$ integrali, che indicheremo con

$$v_1, \quad v_2, \ldots \quad v_h, \quad v_{h+2}, \ldots \quad v_\lambda,$$

possono svolgersi in serie nell'intorno di a. Noi prenderemo per rappresentarli le espressioni (2), nelle quali supporremo che manchi quella corrispondente ad y_{h+1}. Ciò equivale a fare:

$$\alpha_{h+1, m_h} = \alpha_{h+1, m_h+1} = \cdots = \alpha_{h+1, m_h+l} = 0. \tag{7}$$

Con queste $\lambda - 1$ funzioni si formi l'integrale particolare con le $\lambda - 1$ costanti arbitrarie $c_1, c_2, \ldots c_h, c_{h+2}, \ldots c_\lambda$ espresso da:

$$y = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_h v_h + c_{h+2} v_{h+2} + \cdots + c_\lambda v_\lambda.$$

Quest'integrale potrà nelle vicinanze di a essere rappresentato dalla serie (3), nella quale le γ sono sempre date dalle (4), purchè si tenga conto delle (7), ossia purchè si faccia $c_{h+1} = 0$.

Con un ragionamento analogo a quello fatto precedentemente si vede che possiamo prendere le:

$$\gamma_0, \quad \gamma_{m_1}, \ldots \quad \gamma_{m_{h-1}}, \quad \gamma_{m_{h+1}}, \ldots \quad \gamma_{m_{\lambda-1}}$$

come costanti arbitrarie invece delle c, e che ogni γ della serie (3) dipende dalle sole γ arbitrarie che la precedono; sicchè anche per la γ_{m_h} si avrà una espressione della forma:

$$\gamma_{m_h} = \rho_0 \gamma_0 + \rho_1 \gamma_{m_1} + \cdots + \rho_{h-1} \gamma_{m_{h-1}} \tag{8}$$

ove le ρ sono costanti determinate e finite. Seguitando a ragionare e ad operare come nel caso precedente, e di più ricordando che γ_{m_h} non è arbitraria, ma è data dalla (8), si giunge alle relazioni:

$$
\begin{array}{l}
D_{1,2}=0 \\
D_{1,3}=0, \qquad D_{2,3}=0 \\
\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots \\
D_{1,h+1}=0, \qquad D_{2,h+1}=0, \dots \qquad D_{h,h+1}=0 \\
\qquad D_{1,h+2}+\rho_0 D_{h+1,h+2}=0 \\
\qquad D_{2,h+2}+\rho_1 D_{h+1,h+2}=0 \\
\qquad \dots\dots\dots \\
\qquad D_{h,h+2}+\rho_{h-1} D_{h+1,h+2}=0 \\
\qquad D_{1,h+3}+\rho_0 D_{h+1,h+3}=0 \\
\qquad D_{2,h+3}+\rho_1 D_{h+1,h+3}=0 \\
\qquad \dots\dots\dots \\
\qquad D_{h,h+3}+\rho_{h-1} D_{h+1,h+3}=0 \\
\qquad \dots\dots\dots \\
\qquad \dots\dots\dots \\
\qquad D_{1,\lambda}+\rho_0 D_{h+1,\lambda}=0 \\
\qquad D_{2,\lambda}+\rho_1 D_{h+1,\lambda}=0 \\
\qquad \dots\dots\dots \\
\qquad D_{h,\lambda}+\rho_{h-1} D_{h+1,\lambda}=0 \\
D_{h+2,h+3}=0 \\
D_{h+2,h+4}=0, \qquad D_{h+3,h+4}=0 \\
\dots\dots\dots \\
D_{h+2,\lambda}=0, \qquad D_{h+3,\lambda}=0, \dots \qquad D_{\lambda-1,\lambda}=0.
\end{array}
$$

Da queste, eliminando le ρ, si ottengono le altre:

$$\left.\begin{array}{l}
D_{1,2}=0 \\
D_{1,3}=0, \qquad D_{2,3}=0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
D_{1,h+1}=0, \qquad D_{2,h+1}=0,\ldots \qquad D_{h,h+1}=0 \\
\dfrac{D_{1,h+2}}{D_{h+1,h+2}}=\dfrac{D_{1,h+3}}{D_{h+1,h+3}}=\cdots=\dfrac{D_{1,\lambda}}{D_{h+1,\lambda}} \\
\dfrac{D_{2,h+2}}{D_{h+1,h+2}}=\dfrac{D_{2,h+3}}{D_{h+1,h+3}}=\cdots=\dfrac{D_{2,\lambda}}{D_{h+1,\lambda}} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\dfrac{D_{h,h+2}}{D_{h+1,h+2}}=\dfrac{D_{h,h+3}}{D_{h+1,h+3}}=\cdots=\dfrac{D_{h,\lambda}}{D_{h+1,\lambda}} \\
D_{h+2,h+3}=0 \\
D_{h+2,h+4}=0, \qquad D_{h+3,h+4}=0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
D_{h+2,\lambda}=0, \qquad D_{h+3,\lambda}=0,\ldots \qquad D_{\lambda-1,\lambda}=0.
\end{array}\right\} \qquad (9)$$

Queste relazioni, che sono in numero di:

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2},$$

esprimono la condizione necessaria e sufficiente affinchè dagl'integrali del gruppo (1) se ne possano ottenere $\lambda-1$ distinti e privi di logaritmi.

Se qualcuno dei denominatori delle eguaglianze (9) composto di membri frazionari è nullo, dovremo pure eguagliare a zero il corrispondente numeratore.

Evidentemente i $\lambda - h - 1$ determinanti:

$$D_{h+1,h+2}, \qquad D_{h+1,h+3},\ldots \qquad D_{h+1,\lambda}$$

non possono essere tutti eguali allo zero, perchè in tal caso le relazioni (9) si trasformerebbero nelle (6), ed allora tutti gl'integrali del gruppo (1) sarebbero privi di logaritmi.

Al numero h si possono dare tutti i valori interi da 1 a $\lambda - 1$; sicchè vi sono $\lambda - 1$ modi nei quali può avvenire che dal gruppo (1) si ottengano $\lambda - 1$ integrali privi di logaritmi.

Quando è $\lambda = 2$, cioè quando gl'integrali del gruppo (1) sono due soltanto, allora le (6) si riducono alla sola relazione:

$$D_{1,2} = 0,$$

e le (9) cessano d'esistere. Difatti in questo caso è $\lambda - 1 = 1$, ed è noto che nel gruppo (1) esiste sempre un integrale privo di logaritmi. Se poi vogliamo che sia il solo, dobbiamo porre come condizione:

$$\operatorname{mod}(D_{1,2}) > 0.$$

Quando è $\lambda = 3$, abbiamo per le (6):

$$D_{1,2} = 0, \qquad D_{1,3} = 0, \qquad D_{2,3} = 0,$$

e per le (9) possono presentarsi due casi, cioè:

$$h = 1, \qquad h = 2.$$

Nel primo caso si ha:

$$D_{1,2} = 0, \qquad \operatorname{mod}(D_{2,3}) > 0,$$

e nel secondo abbiamo invece:

$$D_{2,3} = 0,$$

e dei due determinanti:

$$D_{1,2}, \qquad D_{1,3}$$

uno almeno deve essere differente da zero.

II.

6. Ricordiamo che una funzione definita in tutto il piano si dice meromorfa, quando non ha alcun punto di singolarità essenziale a distanza finita. Le funzioni meromorfe possono quindi avere nel piano infiniti poli formanti un gruppo numerabile di punti, come avviene ad es.: per le funzioni ellittiche.

Ricordiamo ancora che un integrale di un'equazione differenziale lineare si dice regolare nelle vicinanze di un punto singolare a, se si mantiene finito in questo punto, quando è moltiplicato per una potenza conveniente di $x - a$. Dalle considerazioni esposte al principio della parte prima risulta che la condizione necessaria e sufficiente affinchè tutti gl'integrali di un'equazione della forma:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0 \tag{1}$$

siano regolari nell'intorno del punto a, e che i coefficienti dell'equazione divengano infiniti in a, in modo che p_i abbia in questo punto un polo d'ordine non superiore ad i. Quando per il punto a è soddisfatta questa condizione, esiste sempre l'equazione determinante della (1), la quale ci permette di costruire gl'integrali nelle vicinanze di a.

Le equazioni differenziali lineari che dovremo qui considerare sono a coefficienti meromorfi, ed hanno sempre tutti i loro integrali regolari nelle vicinanze di ogni punto singolare a distanza finita. Per semplicità indicheremo queste equazioni, quando siano messe sotto la forma (1), con le notazioni:

$$F(x, y, n) = 0, \qquad G(x, y, m) = 0, \qquad \Phi(v, z, p) = 0,$$

e talvolta anche con le altre:

$$F = 0, \qquad G = 0, \qquad \Phi = 0.$$

Nelle prime notazioni le tre lettere fra parentesi stanno ad indicare rispettivamente la variabile indipendente, la funzione incognita e l'ordine dell'equazione.

Ora si vede facilmente che un'equazione:

$$F(x, y, n) = 0$$

gode delle due seguenti proprietà fondamentali:

1.° *Ogni integrale uniforme che la verifica è una funzione meromorfa.*

2.° *Se essa è riducibile, è soddisfatta da tutti gl'integrali di un'altra equazione:*

$$G(x, y, m) = 0,$$

essendo $m < n$.

Infatti supponiamo dapprima che $F = 0$ abbia un integrale uniforme; allora quest'integrale, dovendo essere regolare nei vari punti a distanza finita, non potrà avere che poli in tutti quei punti singolari nei quali non è finito e continuo; per conseguenza esso sarà una funzione meromorfa.

Supponiamo poi che la $F = 0$ sia riducibile; allora essa ammetterà tutti gl'integrali di un'altra equazione a coefficienti monodromi e d'ordine $m < n$. Ma questa nuova equazione, avendo tutti i suoi integrali regolari in tutti i punti singolari a distanza finita, sarà della stessa natura di $F = 0$, e quindi potrà essere rappresentata da:

$$G(x, y, m) = 0.$$

7. Ci possiamo servire di questi risultati per dimostrare due teoremi relativi alle equazioni differenziali lineari a coefficienti ellittici. Il primo di questi teoremi è il seguente:

Un' equazione:

$$F(x, y, n) = 0$$

a coefficienti ellittici e riducibile ammette tutti gl' integrali di un'altra equazione:

$$G(x, y, m) = 0$$

pure a coefficienti ellittici e di ordine $m < n$.

La:

$$F(x, y, n) = 0$$

essendo riducibile, ammetterà tutti gl' integrali di un' altra equazione:

$$G(x, y, m) = 0$$

d'ordine $m < n$. Di queste equazioni ve ne potranno essere più d' una; noi per altro sceglieremo una di quelle per le quali m abbia il massimo valore. Si tratta di dimostrare che l'equazione $G(x, y, m) = 0$ scelta in questo modo è pure a coefficienti ellittici.

Supponiamo infatti che non lo sia; allora, indicando con 2ω e $2\omega'$ i periodi dei coefficienti di $F = 0$, osserviamo che quest' equazione sarà ancora soddisfatta dagl' integrali delle altre due:

$$G(x + 2\omega, y, m) = 0, \qquad G(x + 2\omega', y, m) = 0.$$

Confrontiamo la $G(x, y, m) = 0$ con una di queste equazioni, ad es.: con la prima; può darsi che le due equazioni:

$$G(x, y, m) = 0, \qquad G(x + 2\omega, y, m) = 0 \tag{2}$$

non abbiano alcun integrale a comune, come pure può avvenire che siano ambedue riducibili, ed abbiano p integrali a comune, essendo naturalmente $p < m$. In tal caso questi p integrali appartengono ad una equazione:

$$H(x, y, p) = 0.$$

Consideriamo un punto qualunque x_0 che non sia un polo dei coefficienti di $F=0$, e indichiamo con $u_1, u_2, \ldots u_n$ n integrali distinti di questa equazione definiti dai loro sviluppi in serie di CAUCHY nelle vicinanze di x_0. È chiaro che potremo supporli scelti in modo che:

$$u_1, \quad u_2, \ldots \quad u_{m-p}, \quad u_{m-p+1}, \ldots \quad u_m \tag{3}$$

e

$$u_{m-p+1}, \quad u_{m-p+2}, \ldots \quad u_{2m-p} \tag{4}$$

appartengano gli uni alla prima delle (2) e gli altri alla seconda. Allora:

$$u_{m-p+1}, \quad u_{m-p+2}, \ldots \quad u_m$$

saranno gl'integrali di $H=0$. Se le (2) non avessero integrali a comune, e quindi la $H=0$ non esistesse, basterebbe fare $p=0$.

Si descriva con la x un cammino qualunque tale che non passi per alcun polo dei coefficienti di $F=0$, e si ritorni in x_0. Durante questo giro chiuso, che potremo indicare con Γ, le funzioni u variano con continuità; ma, quando x ritorna in x_0, le u prendono valori differenti dagli iniziali, e che si possono ottenere effettuando su questi valori iniziali una sostituzione lineare a coefficienti costanti.

Ma col giro Γ si vengono ad eseguire altre due sostituzioni lineari, cioè una sugli integrali (3), e l'altra sugli integrali (4), e ciò perchè i coefficienti delle equazioni (2) sono monodromi. Da ciò risulta subito che, se consideriamo le funzioni:

$$u_1, \quad u_2, \ldots \quad u_{2m-p}, \tag{5}$$

su di esse pure si viene ad eseguire una sostituzione lineare a coefficienti costanti, quando colla x si fa il giro Γ. Se quindi si costruisce un'equazione che nelle vicinanze di x_0 abbia le funzioni (5) per integrali, si vede subito che essa è a coefficienti monodromi e di quelle che si possono indicare con una notazione della forma:

$$K(x, y, 2m-p)=0.$$

Ma quest'equazione non può esistere, perchè tutti i suoi integrali, che sono in numero di $2m-p>m$, appartengono anche alla $F=0$. Per conseguenza i coefficienti di $G(x, y, m)=0$ devono avere il periodo 2ω. Similmente si prova che ammettono il periodo $2\omega'$; quindi la $G(x, y, m)=0$ è un'equazione a coefficienti ellittici c. d. d.

Il secondo teorema si riferisce a quelle equazioni che, oltre ad essere riducibili, ammettono alcuni integrali uniformi; esso si può enunciare così:

Se un' equazione:

$$F(x, y, n) = 0$$

a coefficienti ellittici ammette m integrali uniformi, essendo $m < n$, questi m integrali appartengono ad un'equazione:

$$G(x, y, m) = 0$$

di quelle del Picard, *e si può abbassare l'ordine di $F = 0$ di m unità, in modo che l'equazione:*

$$H(x, u, n - m) = 0$$

che si ottiene sia pure a coefficienti ellittici.

Siano infatti:

$$y_1(x), \qquad y_2(x), \dots \qquad y_m(x)$$

gli m integrali uniformi di $F = 0$, e 2ω, $2\omega'$ i periodi dei coefficienti di questa equazione. Le funzioni:

$$y_1(x + 2\omega), \qquad y_2(x + 2\omega), \dots \qquad y_m(x + 2\omega)$$

sono pure integrali uniformi e distinti di $F = 0$. Essi quindi devono essere espressioni lineari a coefficienti costanti di $y_1, y_2, \dots y_m$, ed il determinante di questi coefficienti sarà differente da zero. Lo stesso si dica per

$$y_1(x + 2\omega'), \qquad y_2(x + 2\omega'), \dots \qquad y_m(x + 2\omega').$$

Perciò il cambiamento di x in $x + 2\omega$ e $x + 2\omega'$ equivale a fare sopra gl'integrali uniformi due sostituzioni lineari. Così si vede subito che l'equazione:

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \dots & y_m \\ y' & y'_1 & y'_2 \dots & y'_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y^{(m)} & y_1^{(m)} & y_2^{(m)} \dots & y_m^{(m)} \end{vmatrix} = 0,$$

che si può mettere sotto la forma:

$$G(x, y, m) = 0,$$

è di quelle del Picard.

Poichè le m funzioni uniformi $y_1, y_2, \dots y_m$ formano un sistema fondamentale d'integrali dell'equazione a coefficienti ellittici $G = 0$, così fra esse ve ne dovrà essere una almeno di seconda specie, y_1, ad es. Se ora facciamo in $F=0$ ed in $G=0$:

$$y = y_1 \int z\, dx,$$

otteniamo due equazioni in z a coefficienti ellittici e d'ordine $n-1$ l'una e $m-1$ l'altra. Inoltre la seconda è di quelle del Picard, e tutti i suoi $m-1$ integrali uniformi appartengono anche alla prima.

Fra questi ve ne sarà uno z_1 di seconda specie; sicchè, facendo nelle due equazioni ottenute:

$$z = z_1 \int t\, dx,$$

se ne avranno altre due in t analoghe ad esse, d'ordine $n-2$ l'una e $m-2$ l'altra sulle quali potremo operare come sulle precedenti. E dopo avere eseguito questa operazione m volte, l'equazione proveniente dalla $G=0$ si ridurrà alla forma $u=0$, essendo u la funzione incognita, nel mentre che quella che discende dalla $F=0$ sarà d'ordine $n-m$ ed a coefficienti doppiamente periodici.

8. Avanti di lasciare queste considerazioni facciamo un'ultima osservazione sulle equazioni a coefficienti ellittici.

Sia:

$$F(x,\ y,\ n) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0 \tag{6}$$

una di tali equazioni, e siano 2ω, $2\omega'$ i periodi dei suoi coefficienti. Supponiamo che la variabile indipendente sia scelta in modo che non cadano poli delle funzioni p sul contorno del parallelogrammo fondamentale, cioè di quel parallelogrammo formato dai vertici 0, 2ω, $2\omega'$, $2\omega + 2\omega'$. Indichiamo con Γ_1 un giro chiuso e positivo eseguito colla variabile x sul contorno del parallelogrammo fondamentale a partire dal vertice zero, e consideriamo un sistema d'integrali y_1, $y_2, \ldots y_n$, che supporremo definiti dai loro sviluppi in serie di Cauchy nelle vicinanze del punto zero. Quest'integrali sono finiti e continui lungo il contorno del parallelogrammo fondamentale, e col giro Γ_1 si viene ad eseguire su di essi una sostituzione lineare a coefficienti costanti data da:

$$S = \left\{ \begin{array}{llll} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \ldots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \ldots & \alpha_{2,n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} \ldots & \alpha_{n,n} \end{array} \right\}.$$

Una proprietà fondamentale dell'equazione $F=0$ è la seguente:

Il determinante Δ della sostituzione S è uguale all'unità.

Infatti, se consideriamo la funzione D espressa da:

$$D = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} \dots & y_1 \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} \dots & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} \dots & y_n \end{vmatrix},$$

si vede che essa è finita e continua sul contorno del parallelogrammo fondamentale, e che dopo il giro Γ_1 si riproduce moltiplicata per il fattore Δ. Ma per un noto teorema del LIOUVILLE abbiamo ancora:

$$D = C e^{-\int p_1 dx},$$

essendo C una costante determinata differente da zero. Ora dalla teoria delle funzioni doppiamente periodiche risulta che l'integrale $\int p_1 dx$ esteso al contorno del parallelogrammo fondamentale è uguale allo zero. Da ciò si deduce che dopo il giro Γ_1 la funzione D deve riprendere lo stesso valore; per conseguenza deve essere:

$$\Delta = 1.$$

Nella sostituzione S le α possono avere differenti sistemi di valori, tali però che sia sempre $\Delta = 1$. Così ad esempio può darsi che tutti gl'integrali della (6) riprendano lo stesso valore col giro Γ_1; allora S è la sostituzione identica.

Quando non si presenta questo caso si eseguisca sopra il sistema d'integrali $y_1, y_2, \dots y_n$ una sostituzione lineare a coefficienti costanti data da:

$$H = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \dots & \beta_{1,n} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \dots & \beta_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} \dots & \beta_{n,n} \end{pmatrix},$$

ove le β sono costanti, che per ora assoggetteremo alla sola condizione di non annullare il determinante di H. Si ottiene in tal modo un nuovo sistema d'integrali, che potremo indicare con $z_1, z_2, \ldots z_n$. Sia S_1 la sostituzione che si viene ad eseguire su questi nuovi integrali, quando con la x si fa il giro Γ_1, e Δ_1 il determinante di S_1. Si ha evidentemente:

$$S_1 = HSH^{-1}$$

e

$$\Delta_1 = \Delta = 1,$$

cioè S_1 ed S sono trasformate l'una dell'altra.

Si disponga delle costanti β in modo che S_1 venga ad avere la forma normale, cioè in modo che si abbia:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & 0 & 0 \ldots & 0 \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n,1} & \gamma_{n,2} & \gamma_{n,3} \ldots & \gamma_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Allora avremo pure:

$$\gamma_{1,1}\gamma_{2,2}\gamma_{3,3}\ldots\gamma_{n,n} = 1.$$

Per conseguenza se $n-1$ di queste quantità sono eguali all'unità, lo stesso dovrà accadere della n^{esima}.

Epperò se la (6) ammette soltanto $n-1$ integrali distinti, che riprendono lo stesso valore, quando colla x si fa il giro Γ_1, tutte le quantità:

$$\gamma_{1,1}, \quad \gamma_{2,2}, \ldots \quad \gamma_{n,n}$$

saranno uguali all'unità, èd anzi potremo disporre delle β in modo che S_1 si riduca alla forma semplice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta & 0 \ldots & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

essendo δ una costante determinata diversa da zero.

Da queste considerazioni si deduce che quando la (6) ha entro il parallelogrammo fondamentale un solo punto critico per gl'integrali, tale che nelle sue vicinanze esistano $n-1$ integrali monodromi, l'equazione determinante relativa a questo punto ha tutte le sue radici intere.

Infatti $n-1$ di queste radici devono essere intere, e ciò perchè possano esistere $n-1$ integrali monodromi nell'intorno del punto critico. In quanto poi alla n^{esima} radice essa pure deve essere intera, perchè altrimenti il determinante Δ_1 non potrebbe essere uguale all'unità.

III.

9. Consideriamo l'equazione differenziale lineare:

$$F(x,\, y,\, n) = 0$$

a coefficienti doppiamente periodici e coi periodi 2ω, $2\omega'$, per la quale supporremo che si possa determinare un parallelogrammo fondamentale, tale che in esso esistano $n-1$ integrali uniformi, e che l'ultimo integrale, che non è uniforme, non riprenda lo stesso valore, quando colla variabile indipendente si gira attorno a tutti i punti singolari di questo parallelogrammo. Evidentemente una tale equazione comprende come caso particolare quelle che abbiamo accennato al principio di questo lavoro.

Si tratta qui di dimostrare che queste proprietà, che abbiamo attribuito alla $F=0$, sono sufficienti per stabilire che essa è riducibile, ed ammette un gruppo d'integrali uniformi.

Cominceremo dall'esporre un lemma, sul quale si fonda la dimostrazione che dobbiamo fare. Questo lemma, che si riferisce ad una proprietà della sostituzione (7) del capitolo precedente, si può enunciare così:

Essendo S una sostituzione lineare d'ordine n e T un'altra sostituzione pure d'ordine n ed espressa da:

$$T = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \delta & 0 \ldots & 1 \end{Bmatrix},$$

ove δ è una costante diversa da 0, se S e TS sono trasformate l'una dell'altra, qualunque potenza di S ha uguale a zero il termine della prima linea e dell'ultima colonna.

Sia S' la sostituzione che effettua la trasformazione, cioè si abbia:

$$S'SS'^{-1} = TS. \tag{1}$$

Consideriamo ora la sostituzione:

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \dots & \alpha_{2,n-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} \dots & \alpha_{n-1,n-1} & 0 \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} \dots & \alpha_{n\,n-1} & 1 \end{vmatrix},$$

ove le α sono costanti, che per ora assoggetteremo alla sola condizione di rendere eguale alla unità il determinante di H. Allora si trova facilmente:

$$HT = TH,$$

e da questa e dalla (1) si ricava:

$$S'_1 S_1 S'^{-1}_1 = T S_1, \tag{2}$$

essendo:

$$S'_1 = HS' H^{-1}, \qquad S_1 = HSH^{-1}.$$

Ora dalla seconda di queste due relazioni si ottiene:

$$S_1^{-1} = HS^{-1} H^{-1},$$

e quindi:

$$S_1^p = HS^p H^{-1},$$

essendo p un numero intero e positivo qualunque.

È facile vedere che S^p e S_1^p hanno eguale il termine della prima linea e dell'ultima colonna, sicchè basterà dimostrare che in S_1^p questo termine è uguale allo zero.

Se poniamo:

$$S_1 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2\,2} \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} \dots & a_{n\,n} \end{vmatrix},$$

si ha:

$$TS_1 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\,1} + \delta a_{1,1} & a_{n,2} + \delta a_{1\,2} \dots & a_{n,n} + \delta a_{1,n} \end{vmatrix},$$

e le a sono quantità che dipendono dalle α e dalle costanti di S.

Da un noto teorema di *K* WEIERSTRASS si deduce (*) che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la (2) sia soddisfatta è che i determinanti:

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1}-\varepsilon & a_{1,2}\dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\varepsilon\dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2}\dots & a_{n,n}-\varepsilon \end{vmatrix},$$

$$D' = \begin{vmatrix} a_{1,1}-\varepsilon & a_{1,2}\dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\varepsilon\dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}+\delta a_{1,1} & a_{n,2}+\delta a_{1,2}\dots & a_{n,n}+\delta a_{1,n}-\varepsilon \end{vmatrix}$$

abbiano i medesimi divisori elementari. Per conseguenza le due eguaglianze:

$$D = 0, \qquad D' = 0, \tag{3}$$

nelle quali si considera ε come quantità incognita, devono essere equivalenti. Da esse si deduce:

$$D' - D = -\delta\varepsilon L = 0, \tag{4}$$

essendo:

$$L = \begin{vmatrix} a_{2,2}-\varepsilon & a_{2,3}\dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3}-\varepsilon\dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3}\dots & a_{n-1,n-1}-\varepsilon & a_{n-1,n} \\ a_{1,2} & a_{1,3}\dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \end{vmatrix}.$$

Le due equazioni (3) sono di grado n, e la (4) è soltanto di grado $n-1$; per conseguenza essa deve risultare identicamente nulla, essendo soddisfatta da n valori di ε. Così nel determinante L, che è di grado $n-2$ in ε, dovranno risultare nulli i coefficienti delle varie potenze di ε. Eguagliando a zero quello di ε^{n-2}, si ha:

$$a_{1,n} = 0.$$

Può darsi che si abbia ancora:

$$a_{2,n} = a_{3,n} = \dots = a_{n-1,n} = 0. \tag{5}$$

(*) Vedi VOLTERRA: *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari.* Memorie della Società Italiana delle Scienze detta dei XL, vol. 6, serie 3.ª.

Allora la S_1 e tutte le sue potenze positive e negative godono della proprietà di avere eguale allo zero tutti i termini dell'ultima colonna, all'infuori dell'ultimo, e per conseguenza anche quello della prima linea.

Se poi le (5) non sono soddisfatte, potremo disporre delle α in modo che si abbia:

$$a_{2,n} = a_{3,n} = \cdots = a_{n-2,n} = 0, \qquad \mathrm{mod}(a_{n-1,n}) > 0. \tag{6}$$

In tal caso nel determinante, il coefficiente di ε^{n-3} si riduce a $a_{1,n-1}\, a_{n-1,n}$, e quindi deve essere:

$$a_{1,n-1} = 0.$$

Se è ancora:

$$a_{2,n-1} = a_{3,n-1} = \cdots = a_{n-2\ n-1} = 0, \tag{7}$$

allora la S_1 e tutte le sue potenze godono della proprietà di avere eguale allo zero i termini delle ultime due colonne all'infuori di quelli appartenenti alle ultime due linee. Per conseguenza tutte le potenze di S_1 hanno eguale a zero il termine della prima linea e dell'ultima colonna. Ma, se non sono verificate le (7), potremo sempre disporre delle α in modo che oltre alle (6) si abbia ancora:

$$a_{2,n-1} = a_{3,n-1} = \cdots = a_{n-3\ n-1} = 0, \qquad \mathrm{mod}(a_{n-2,n-1}) > 0;$$

quindi nel determinante L il coefficiente di ε^{n-4} si riduce a:

$$a_{1,n-2}\, a_{n-2,n-1}\, a_{n-1,n},$$

per cui deve essere:

$$a_{1,n-2} = 0,$$

e seguitando in questo modo si vede che si possono sempre prendere le α in modo che S_1^q, ove q è un numero intero qualunque, abbia eguale a zero il termine della prima linea e dell'ultima colonna. Ma, per quello che abbiamo detto relativamente ad S e ad S_1, si vede subito che anche S^q deve godere di questa proprietà c. d. d.

10. Ritornando ora alla $F = 0$, osserviamo che quello che ci proponiamo di dimostrare relativamente ad essa si può enunciare sotto forma di teorema nel modo seguente:

Le equazioni differenziali lineari a coefficienti ellittici ammettono un gruppo d'integrali uniformi, tutte le volte che si può determinare un parallelogrammo fondamentale, tale che in esso esistano $n - 1$ integrali distinti e uniformi, e che l'ultimo integrale che non è uniforme non riprenda lo stesso *valore, quando colla variabile si gira attorno a tutti i punti singolari di questo parallelogrammo.*

Consideriamo dunque la $F=0$, che gode di tutte queste proprietà, e determiniamo la variabile indipendente in modo che sul contorno del parallelogrammo fondamentale, che deve soddisfare alle condizioni poste nell'enunciato, non cada alcun punto d'infinito dei coefficienti di $F=0$.

Per le osservazioni fatte alla fine del capitolo precedente ricordiamo che, scelto il parallelogrammo fondamentale, che deve soddisfare alle condizioni dell'enunciato, in modo che sul suo contorno non cadano punti singolari, si può sempre determinare un sistema d'integrali $y_1, y_2, \dots y_n$ tali che, facendo colla variabile un giro positivo sul contorno di questo parallelogrammo, si venga ad eseguire su di esso la sostituzione T. Di qui risulta che $y_1, y_2, \dots y_{n-1}$ sono gli $n-1$ integrali uniformi entro il parallelogrammo, e che y_n è quello non uniforme.

Siano S ed S' le sostituzioni che si eseguiscono rispettivamente sul sistema d'integrali $y_1, y_2, \dots y_n$, quando colla variabile si va da 0 a 2ω e da 0 a $2\omega'$, camminando sui lati che congiungono questi vertici. Allora un giro positivo, eseguito colla variabile sul contorno del parallelogrammo a partire dal vertice 0, produce sul sistema d'integrali la sostituzione:

$$S S' S^{-1} S'^{-1} = T$$

e quindi:

$$S' S S'^{-1} = T^{-1} S, \qquad S S' S^{-1} = T S'. \tag{8}$$

Queste relazioni ci mostrano che le sostituzioni S, S' sono rispettivamente le trasformate delle altre

$$T^{-1} S, \qquad T S'.$$

Dalla prima delle (8) si ha poi:

$$S' S_\alpha S^{-1} = T^{-1} S_\alpha,$$

essendo:

$$S_\alpha = S S'^\alpha,$$

e α un numero intero qualunque.

Ma abbiamo ancora:

$$S_\alpha S' S_\alpha^{-1} = T S'$$

e:

$$S_\alpha S_{\alpha, \beta} S_\alpha^{-1} = T S_{\alpha, \beta},$$

essendo:

$$S_{\alpha\,\beta} = S' S_{\alpha}^{\beta},$$

e β un altro numero pure arbitrario. Seguitando in questo modo si può costruire la sostituzione $S_{\alpha,\beta,\gamma}$, facendo:

$$S_{\alpha,\beta\,\gamma} = S_{\alpha} S_{\alpha,\beta}^{\gamma}.$$

Procedendo sempre con questa legge si può costruire la sostituzione:

$$S_{\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,..\,\lambda},$$

la quale è perfettamente determinata, quando sono fissati i valori dei numeri interi α, β, γ,... λ. Se m è il loro numero, si deduce subito dal modo di formazione di:

$$S_{\alpha,\,\beta,\,\gamma,...\,\lambda}$$

che questa sostituzione e l'altra data da:

$$T^{(-1)^m} S_{\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,..\,\lambda}$$

sono trasformate l'una dell'altra.

Le sostituzioni fondamentali che entrano nella costituzione di $S_{\alpha,\beta,\gamma,..\lambda}$ sono S ed S', e queste possono anche avere esponenti negativi, perchè α, β, γ,... λ sono numeri interi qualunque. Ciò significa che nella $S_{\alpha,\beta,\gamma,...\lambda}$ possono anche entrare le sostituzioni inverse S^{-1}, S'^{-1}. Ora, quando in un prodotto di sostituzioni entra una sostituzione S h volte e la sua inversa S^{-1} k volte, diremo che S entra in quel prodotto $h-k$ volte. Ciò posto siano:

$$[\alpha,\,\beta,\,\gamma,...\,\lambda], \qquad [\alpha,\,\beta,\,\gamma,...\,\lambda]'$$

i numeri delle volte che S ed S' entrano in $S_{\alpha,\beta,\gamma,...\lambda}$.

Consideriamo poi la sostituzione:

$$S_{\beta,\,\gamma,...\,\lambda},$$

la quale si costruisce con la legge precedente. Le sostituzioni ausiliarie che servono per la sua formazione sono:

$$S_{\beta} = S S^{\beta}, \qquad S_{\beta,\,\gamma} = S' S_{\beta}^{\gamma} \ldots .$$

Ora la $S_{\alpha,\beta,\gamma\,..\lambda}$ si può considerare come costituita da S' e da S_{α}; in tal caso essa è formata da queste sostituzioni come $S_{\beta\,\gamma,\,..\lambda}$ è formata da S e da S'.

Perciò:

$$[\beta,\,\gamma,...\,\lambda] \quad \text{e} \quad [\beta,\,\gamma,...\,\lambda]'$$

sono i numeri delle volte che S' e S_α entrano in $S_{\alpha,\beta,\gamma,\dots\lambda}$, quando essa si considera costituita da queste sostituzioni. Ma la S entra in $S_{\alpha,\beta,\gamma,\dots\lambda}$ inquantochè si trova in S_α alla prima potenza; epperò avremo:

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\dots\ \lambda] = [\beta,\ \gamma,\dots\ \lambda]'. \tag{9}$$

Invece la S' vi entra per mezzo di S_α e direttamente. Evidentemente la S' entra in $S_{\alpha,\beta,\gamma,\dots\lambda}$ per mezzo di S_α un numero di volte dato da $\alpha\ [\beta,\ \gamma,\dots\ \lambda]'$. Direttamente poi la S' entra in $S_{\alpha\ \beta,\gamma,\dots\lambda}$ un numero di volte eguale a quello che si ha quando si considera questa sostituzione come costituita da S' e da S_α, ossia un numero di volte dato da $[\beta,\ \gamma,\dots\ \lambda]$; quindi abbiamo:

$$[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\dots\ \lambda]' = \alpha\,[\beta,\ \gamma,\dots\ \lambda]' + [\beta,\ \gamma,\dots\ \lambda]. \tag{10}$$

Osserviamo finalmente che le sostituzioni fondamentali S, S' e tutte le altre S, qualunque sieno i loro indici, godono della proprietà esposta nell'enunciato del lemma, cioè esse e tutte le loro potenze hanno eguale a zero il termine della prima linea e dell'ultima colonna.

Si tratta ora di dimostrare che, essendo dati due numeri interi arbitrari α, β, si può sempre costruire una S tale che essa o una sua potenza contenga la S α volte e la S' β volte.

Cominciamo dal considerare due numeri α, β primi fra loro, e supponiamo inoltre che α sia positivo. Allora si possono sempre determinare due altri numeri p_1, α_1 tali che si abbia:

$$\beta = p_1\alpha + \alpha_1,$$

e colla condizione che α_1 sia positivo e minore di α. Considerando poi α e α_1 si possono fare tutte le operazioni necessarie per la ricerca del loro massimo comun divisore. Siano α_2, α_3,... α_{i-1} i resti successivi, essendo $\alpha_{i-1} = 1$, e p_2, p_3,... p_{i-1}, p_i i quozienti successivi, essendo $p_i = \alpha_{i-2}$; avremo le $i-1$ relazioni:

$$\left.\begin{aligned}
\beta &= p_1\alpha + \alpha_1\\
\alpha &= p_2\alpha_1 + \alpha_2\\
\alpha_1 &= p_3\alpha_2 + \alpha_3\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\alpha_{i-3} &= p_{i-1}\,\alpha_{i-2} + 1.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Dalla (9) si ottiene:

$$[p_1, p_2, \dots p_i] = [p_2, \dots p_i]'$$
$$[p_2, p_3, \dots p_i] = [p_3, \dots p_i]'$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$[p_{i-1}, p_i] = [p_i]' = p_i$$
$$[p_i] = 1.$$

Da queste e dalla (10) si ricava poi:

$$[p_1, p_2, \dots p_i]' = p_1 [p_1, p_2, \dots p_i] + [p_2, \dots p_i]$$
$$[p_1, p_2, \dots p_i] = p_2 [p_2, \dots p_i] + [p_3, \dots p_i]$$
$$[p_2, \dots p_i] = p_3 [p_3, \dots p_i] + [p_4, \dots p_i]$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$[p_{i-2}, p_{i-1}, p_i] = p_{i-1} [p_{i-1}, p_i] + [p_i] = p_{i-1} p_i + 1.$$

Quest'ultime relazioni confrontate con le (11) ci mostrano che:

$$\alpha = [p_1, p_2, \dots p_i], \qquad \beta = [p_1, p_2, \dots p_i]',$$

e quindi la sostituzione:

$$S_{p_1, p_2, \dots p_i}$$

contiene la S α volte e la S' β volte.

Si abbiano ora due numeri interi qualunque γ, δ. Se sono ambedue diversi da zero, si può determinare il massimo comun divisore m come se fossero positivi. Allora i numeri:

$$\frac{\gamma}{\pm m}, \qquad \frac{\delta}{\pm m},$$

nei quali si prende il segno $+$ o il segno $-$ secondochè γ è positivo o negativo, godono di tutte le proprietà di α e β. Per conseguenza si può sempre trovare una sostituzione:

$$S_{p_1, p_2, \dots p_i}$$

per la quale sia:

$$[p_1, p_2, \dots p_i] = \frac{\gamma}{\pm m}, \qquad [p_1, p_2, \dots p_i]' = \frac{\delta}{\pm m}.$$

Allora la sostituzione:

$$S_{p_1, p_2, \dots p_i}^{\pm m}$$

contiene γ volte la S e δ volte la S'.

Se poi è:

$$\gamma = 0, \qquad \delta \gtrless 0,$$

oppure:

$$\gamma \gtrless 0, \qquad \delta = 0,$$

allora si può considerare nel primo caso la sostituzione S'^{δ} e nel secondo l'altra S^{γ}.

In ogni caso la sostituzione che si determina, e che contiene γ volte la S e δ volte la S', ha eguale a zero il termine della prima linea e dell'ultima colonna, perchè essa è sempre una potenza positiva o negativa di una S.

Ora se diamo a γ e a δ i sistemi di valori:

$$1, 0; \quad -1, 0; \quad 0, 1; \quad 0, -1; \quad 1, 1; \quad -1, 1; \quad 1, -1; \quad -1, -1,$$

si vede che y_1 si comporta negli otto parallelogrammi, che racchiudono quello fondamentale, nello stesso modo che combinazioni lineari a coefficienti costanti di $y_1, y_2, \dots y_{n-1}$ si comportano nel parallelogrammo fondamentale; epperò y_1 è uniforme in questi otto parallelogrammi. Seguitando in questo modo col dare a γ e a δ tutti i possibili sistemi di valori interi, si troverà che y_1 è uniforme in tutto il piano.

Se y_1 è di seconda specie, allora può darsi che esso sia il solo integrale uniforme, ma se non è di seconda specie, esso dovrà far parte di un gruppo d'integrali uniformi in tutto il piano, fra i quali ve ne dovrà essere uno almeno di seconda specie. Così il teorema resta completamente dimostrato.

11. Questo teorema può servire utilmente alla integrazione delle equazioni a coefficienti doppiamente periodici, quando i punti critici per gl'integrali che si trovano entro il parallelogrammo fondamentale si riducono a uno, perchè soltanto allora si può verificare con metodi algebrici e perfettamente determinati se esistono $n-1$ integrali uniformi entro il parallelogrammo fondamentale.

Infatti abbiamo già osservato alla fine del primo capitolo che in questo caso l'equazione determinante relativa all'unico punto critico per gl'integrali ha tutte le sue radici intere. Per conseguenza basterà studiare gl'integrali nelle vicinanze del punto critico e verificare se fra esso ve ne sono $n-1$ distinti che non contengano logaritmi.

Quando i punti critici per gl'integrali che si trovano entro il parallelogrammo fondamentale si riducono ad uno solo, il teorema che abbiamo dimostrato si può enunciare più semplicemente nel modo seguente:

Le equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti doppiamente periodici ed aventi entro il parallelogrammo dei periodi un solo punto critico per gl'integrali ammettono un gruppo d'integrali particolari uniformi, tutte le volte che ne esistono $n-1$ che si mantengono monodromi nelle vicinanze del punto critico.

Le equazioni che soddisfano alle condizioni esposte nell'enunciato di questo teorema possono considerarsi come completamente integrabili. Infatti esse ammettono sempre almeno un integrale particolare uniforme di seconda specie, che si può determinare con metodi analoghi a quelli che sono stati dati nel caso dell'integrale generale uniforme.

Noto uno di questi integrali di seconda specie, che si può prendere per uno degl'integrali y, y_i ad es., si faccia nell'equazione:

$$y = y_i \int z\,dx.$$

Si ottiene in tal modo un'equazione d'ordine $n-1$ in z pure a coefficienti doppiamente periodici ed aventi entro il parallelogrammo fondamentale gli $n-1$ integrali particolari distinti:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_1}{y_i}\right), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_i}\right), \ldots \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{i-1}}{y_i}\right), \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{i+1}}{y_i}\right), \ldots \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y_n}{y_i}\right).$$

Di questi i primi $n-2$ sono sempre uniformi nel parallelogrammo fondamentale, e l'ultimo viene aumentato del primo moltiplicato per δ, quando si gira attorno al punto critico nel senso positivo, nel caso però che sia $i > 1$. Se invece è $i = 1$, allora anche l'ultimo integrale è uniforme, e l'equazione è di quelle del Picard. Sicchè, abbassando di una unità l'ordine dell'equazione data, se ne ottiene un'altra che soddisfa pure alle condizioni del teorema, e che in casi speciali è di quelle del Picard. Ma si può sempre abbassare l'ordine di questa nuova equazione determinandone un integrale. Seguitando in questo modo si giunge ad un'equazione del primo ordine, che è perfettamente integrabile. Risalendo poi dagli integrali successivamente ottenuti a quelli dell'equazione primitiva, si vede che questi ultimi si possono sempre ottenere con quadrature. Epperò le equazioni, che godono delle proprietà esposte nell'enunciato del secondo teorema, possono considerarsi come perfettamente integrabili.

IV.

12. Esporremo in quest'ultima parte alcuni esempi di equazioni del secondo e terzo ordine che soddisfano a tutte le condizioni dell'ultimo teorema che abbiamo enunciato, e mostreremo ancora come talvolta quest'ultimo teorema possa servire utilmente per riconoscere in modo semplice se un'equazione a coefficienti ellittici abbia per integrale generale una fuzione uniforme.

Sia l'equazione del secondo ordine:

$$F(x,\ z,\ 2) = z'' + Pz' + Qz = 0,$$

e le funzioni P e Q siano doppiamente periodiche coi periodi 2ω, $2\omega'$. Affinchè la $F = 0$ soddisfi alle condizioni del teorema bisogna che le equazioni determinanti relative ai suoi punti singolari abbiano le loro radici intere, e che dei punti singolari che cadono entro il parallelogrammo dei periodi uno solo sia critico per gl'integrali. Sicchè deve essere verificata la relazione (*):

$$D_{1,2} = 0$$

per tutti i poli che P e Q hanno entro il parallelogrammo, all'infuori di uno, per il quale deve essere invece:

$$\mathrm{mod}(D_{1,2}) > 0.$$

Noi prenderemo la $F = 0$ in modo che goda di tutte queste proprietà; ma per più generalità supporremo di avere verificato che per tutti i punti singolari del parallelogrammo, all'infuori di uno, è soddisfatta la relazione:

$$D_{1,2} = 0.$$

Possiamo ancora supporre di avere scelto la variabile indipendente x in modo che questo punto, che non sappiamo se sia critico o no per gl'integrali, venga a coincidere col vertice zero del parallelogrammo fondamentale.

Siano a_1, a_2,... a_l i rimanenti punti singolari del parallelogrammo fondamentale e:

$$s_k, \qquad s_k + r_k$$

le radici della determinante relativa ad a_k, disposte in ordine crescente; sicchè s_k ed r_k saranno numeri interi ed r_k sempre positivo e differente da zero.

(*) Vedi parte 1.ª, numero 5.

Fra i numeri r ve ne saranno alcuni eguali all'unità ed altri maggiori di uno. Siano:

$$r_{i+1}, \qquad r_{i+2}, \ldots \qquad r_l$$

quelli eguali ad uno, essendo naturalmente:

$$0 \leqq i \leqq l.$$

Si faccia in $F = 0$ un cambiamento di funzione incognita ponendo:

$$z = y \prod_{k=1}^{k=l} \left[\frac{\sigma(x - a_k)}{\sigma(x)} e^{Z(a_k)x} \right]^{s_k}, \tag{1}$$

essendo:

$$Z(a_k) = \frac{\sigma'(a_k)}{\sigma(a_k)}$$

e $\sigma(x)$ la funzione di Weierstrass corrispondente ai periodi 2ω, $2\omega'$; si ottiene in tal modo la nuova equazione:

$$G(x, y, 2) = y'' + py' + qy = 0,$$

la quale è pure a coefficienti doppiamente periodici, e gode delle stesse proprietà della $F = 0$.

Inoltre è facile vedere che la $G = 0$ è assai più semplice della $F = 0$. Infatti i punti singolari, che essa ha entro il parallelogrammo fondamentale, sono soltanto: 0, a_1, $a_2, \ldots a_i$, e ciò perchè i suoi coefficienti p e q sono finiti negli altri punti a_{i+1}, $a_{i+2}, \ldots a_l$. Le radici delle determinanti di $G = 0$ relative ad a_1, $a_2, \ldots a_i$ sono rispettivamente:

$$0, \ r_1; \qquad 0, \ r_2; \ldots \qquad 0, \ r_i,$$

sicchè l'integrale generale di quest'equazione si mantiene finito e continuo in tutti i punti del parallelogrammo fondamentale all'infuori del vertice zero.

Queste proprietà della $G = 0$ ci mostrano che è meglio considerare una tale equazione invece della $F = 0$, la qual cosa del resto si può sempre fare, perchè per mezzo della relazione (1) si può sempre passare dagli integrali di $G = 0$ a quelli di $F = 0$.

Indichiamo con:

$$-(n + h), \qquad -n$$

le radici della determinante di $G = 0$ relativa al punto zero, disposte in ordine crescente. I numeri n, h sono interi, ed h è sempre positivo, e diviene uguale allo zero solo quando le due radici sono eguali. Questi numeri e gli altri $r_1, r_2, \ldots r_i$ devono soddisfare alla relazione:

$$2n + h + 1 + i - \sum_{k=1}^{k=i} r_k = 0, \tag{2}$$

la quale esprime che la somma dei residui dei poli, che p ha entro il parallelogrammo, è eguale allo zero.

La $G = 0$ è un'equazione del Picard, quando lo zero non è un punto critico per gl'integrali; in caso contrario essa soddisfa a tutte le condizioni dell'ultimo teorema del capitolo precedente, ed ammette quindi un solo integrale uniforme, il quale deve essere di seconda specie, e deve nelle vicinanze dello zero comportarsi come la funzione x^{-n}. Ma ciò non può mai avvenire quando è $n < 0$, perchè allora si avrebbe una funzione di seconda specie sempre finita ed avente in zero un infinitesimo di ordine $-n$. Sicchè per la $G = 0$ si hanno i due seguenti resultati:

1.° Lo zero non può mai essere un punto critico per gl'integrali, quando n è negativo.

2.° Essendo n positivo o nullo e lo zero critico, esiste sempre per la $G = 0$ un integrale particolare uniforme di seconda specie con un polo di ordine n in zero.

Il primo di questi risultati può servire utilmente per verificare se un'equazione del secondo ordine a coefficienti ellittici ammette un integrale generale uniforme. Così ad es., essendo data l'equazione di Lamé:

$$y'' + [-n(n+1)p(x) + h]\,y = 0,$$

si vede subito che essa deve avere un integrale generale uniforme.

Consideriamo un caso speciale d'equazioni a coefficienti ellittici ed aventi un solo integrale uniforme, il qual caso si può ottenere dando valori determinati alle quantità $i, h, n, r_1, r_2, \ldots r_i$, in modo però che sia sempre soddisfatta la (2). Facciamo ad es.:

$$i = 3, \qquad n = 1, \qquad h = 0, \qquad r_1 = r_2 = r_3 = 2.$$

Si ha così un'equazione con quattro punti singolari $0, a, b, c$ entro il parallelogrammo dei periodi; il primo dei quali, cioè lo zero, oltre ad essere singolare è ancora critico per gl'integrali, perchè le radici della sua determinante sono ambedue uguali a -1.

Se poniamo:

$$f(x, \alpha) = \frac{1}{2} \frac{p'(\alpha) + p'(x)}{p(\alpha) - p(x)},$$

si vede che l'equazione si può mettere sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned} y'' + [f(x, a) + f(x, b) + f(x, c)]\, y' + \\ + [p(x) + Af(x, a) + Bf(x, b) + Cf(x, c) + R]\, y = 0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Le relazioni $D_{1,2} = 0$ corrispondenti ai punti a, b, c sono:

$$\left.\begin{aligned} A^2 + p(a) + R &= (A - B) f(a, b) + (A - C) f(a, c) \\ B^2 + p(b) + R &= (B - C) f(b, c) + (B - A) f(b, a) \\ C^2 + p(c) + R &= (C - A) f(c, a) + (C - B) f(c, b) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

sicchè delle quattro quantità A, B, C, R una sola rimane arbitraria.

Essendo $n = 1$, l'integrale uniforme diverrà infinito del primo ordine nel punto zero, e sarà quindi della forma:

$$y_1 = \frac{\sigma(x - \varepsilon)}{\sigma(x)} e^{[Z(\varepsilon) + \lambda] x},$$

ove ε è un punto del parallelogrammo che non coincide con quelli di singolarità, e λ una costante determinata.

Ma invece di questo integrale consideriamo la sua derivata logaritmica, la quale è data da:

$$v_1 = \frac{y'_1}{y_1} = - f(x, \varepsilon) + \lambda. \quad (5)$$

Se prendiamo per funzione incognita:

$$v = \frac{y'}{y},$$

l'equazione differenziale si trasforma nell'altra:

$$\begin{gathered} v' + v^2 + [f(x, a) + f(x, b) + f(x, c)]\, v + \\ + p(x) + Af(x, a) + Bf(x, b) + Cf(x, c) + R = 0. \end{gathered}$$

Ponendo in quest'equazione in luogo di v il valore di v_1 dato dalla (5), si ottiene una nuova relazione, di cui il secondo membro è sempre lo zero, ed il primo è una funzione di prima specie della x con cinque poli del primo ordine entro il parallelogrammo, cioè, 0, a, b, c, ε. Annullando i residui di 0, a, b, c ed il valore che la funzione prende in zero, quando si è annullato il residuo di questo punto, si hanno le cinque relazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} f(a,\,\varepsilon)-\lambda-A&=0\\ f(b,\,\varepsilon)-\lambda-B&=0\\ f(c,\,\varepsilon)-\lambda-C&=0\\ \lambda+A+B+C&=0\\ \lambda^2-2p(\varepsilon)-p(a)-p(b)-p(c)+R&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Evidentemente deve esistere un sistema di valori per ε e λ che verifichino queste relazioni, e ciò perchè si possa determinare la funzione v_1 e quindi l'integrale y_1. Epperò tre delle (6) devono essere conseguenza delle altre due. Ma ci si può accertare di questo eliminando ε e λ dalle (6), perchè allora è facile vedere che si ottengano le (4), le quali per ipotesi sono soddisfatte.

Dalla quarta delle (6) abbiamo:

$$\lambda=-(A+B+C),$$

e dalla quinta, ponendo per λ il suo valore, si ricava:

$$p(\varepsilon)=\frac{(A+B+C)^2+R-p(a)-p(b)-p(c)}{2}.$$

Quest'ultima relazione ci dà due valori per ε; ma soltanto uno di essi è tale che, sostituito nelle prime tre delle (6), le verifica. Difatti, da una di esse, dalla prima per es., si ottiene:

$$p'(\varepsilon)=2(B+C)[p(a)-p(\varepsilon)]-p'(a);$$

ma per simmetria, servendoci ancora delle altre due, si ha invece:

$$p'(\varepsilon)=\frac{2\Sigma(B+C)p(a)-4(A+B+C)p(\varepsilon)-\Sigma p'(a)}{3}.$$

Sostituendo a $p(\varepsilon)$ l'espressione che già abbiamo trovato, si ottiene:

$$p'(\varepsilon)=\frac{1}{3}\,[2\Sigma(B+C)p(a)-\Sigma p'(a)-2(A+B+C)^2-$$
$$-2R(A+B+C)+2(A+B+C)\Sigma p(a)].$$

Per quanto abbiamo detto vi deve sempre essere un valore di ε che verifica al tempo stesso quest' ultima relazione e quella che ci dà $p(\varepsilon)$; ma dalla natura stessa di queste relazioni si vede subito che di tali valori non ve ne può essere che uno. Quindi l'integrale y_1 è perfettamente determinato.

L'altro integrale y_2 è dato da:

$$y_2 = y_1 \int dx \, \frac{\sigma(x-a)\sigma(x-b)\sigma(x-c)}{\sigma(x)\sigma^2(x-\varepsilon)} \, e^{[Z(a)+Z(b)+Z(c)-2Z(\varepsilon)-2\lambda]x}.$$

13. Negli esempi che faremo sulle equazioni del terzo ordine, considereremo equazioni che hanno entro il parallelogrammo dei periodi un solo punto singolare, cioè quello critico per gl'integrali, e supporremo che questo punto coincida col vertice zero, il che del resto si può sempre ottenere con un cambiamento di variabile. Le radici della determinante relativa a zero devono essere intere, e nelle vicinanze di questo punto vi devono essere sempre due integrali distinti privi di logaritmi, la qual cosa, come abbiamo veduto, si può ottenere in due modi differenti.

Sia:

$$G(x, y, 3) = 0$$

un'equazione del terzo ordine a coefficienti ellittici e che abbia entro il parallelogrammo un solo punto singolare, che coincida col vertice zero, e siano:

$$-n, \qquad -n+h, \qquad -n+h+k$$

le radici della determinante relativa a questo punto, che supporremo intere e disposte in ordine crescente.

Dalla natura dell'equazione $G = 0$ si deduce che la somma di queste tre radici deve essere eguale a 3; abbiamo quindi:

$$-3n + 2h + k = 3. \tag{7}$$

Possiamo anche porre per condizione che la $G = 0$ abbia nelle vicinanze dello zero due integrali privi di logaritmi; allora le precedenti radici non potranno essere tutte tre eguali. Tenendo conto di questo fatto e della relazione (7) si vede che i tre numeri n, h, k devono avere valori interi e positivi, potendo anche essere eguali allo zero, colla condizione però che i due numeri h, k non siano nulli al tempo stesso, perchè in questo caso le tre radici sarebbero eguali.

Qui pure l'ultimo teorema del capitolo precedente può servire utilmente per riconoscere in modo semplice se un'equazione del terzo ordine a coefficienti ellittici ha l'integrale generale uniforme.

Supponiamo infatti di aver verificato che per l'equazione $G = 0$ è soddisfatta la relazione:

$$D_{2,3} = 0$$

e di non saper nulla relativamente alle altre due:

$$D_{1,2} = 0, \qquad D_{1,3} = 0.$$

Con questo dato soltanto siamo in grado di dire che la $G = 0$ ha uno o due integrali uniformi. Essa quindi deve ammettere un'integrale uniforme di seconda specie, il quale nelle vicinanze dello zero deve comportarsi come una delle due funzioni:

$$x^{-n+h}, \qquad x^{-n+h+k};$$

ma ciò non è possibile quando è:

$$-n + h \geq 0,$$

perchè allora vi sarebbe un integrale uniforme di seconda specie sempre finito ed avente in zero un infinitesimo d'ordine $-n + h$ o $-n + h + k$. Per conseguenza anche le due altre relazioni $D_{1,2} = 0$ $D_{1,3} = 0$ devono essere soddisfatte, e la $G = 0$ deve avere l'integrale generale uniforme.

Questo fatto si presenta per l'equazione:

$$y''' + [-3n(n+1)p(x) + \alpha]\, y' + [-n(n+1)(n+2)p'(x) + \beta]\, y = 0,$$

ove α, β sono costanti arbitrarie. Infatti le radici della determinante relativa a zero sono:

$$-2n, \qquad n+1, \qquad n+2,$$

ed è facile vedere che la relazione $D_{2,3} = 0$ è sodddisfatta.

Diamo ora alcuni esempi di equazioni a coefficienti ellittici del terzo ordine che hanno soltanto uno o due integrali uniformi.

Per considerare i due casi che si possono presentare diamo alle costanti n, h, k di $G = 0$ i due sistemi di valori:

$$\begin{matrix} 0, & 0, & 3 \\ -1, & 3, & 0. \end{matrix}$$

Si hanno così i due sistemi di radici:

$$\begin{matrix} 0, & 0, & 3 \\ -1, & 2, & 2, \end{matrix}$$

ai quali non potranno naturalmente corrispondere tre integraïi distinti privi di logaritmi nelle vicinanze dello zero. Ma affinchè di questi integrali senza logaritmi ve ne siano due soltanto, dovremo porre per il primo sistema di radici la relazione:

$$D_{2,3} = 0$$

e per il secondo l'altra:

$$D_{1,2} = 0.$$

Nel primo caso si ha l'equazione:

$$y''' + [-2p(x) + \alpha]\,y' + [-2p'(x) + \beta p(x) + \gamma]\,y = 0 \tag{8}$$

e nel secondo l'altra:

$$y''' + [-2p(x) + \alpha]\,y' + [\beta p(x) + \gamma]\,y = 0. \tag{9}$$

In queste due equazioni le tre costanti α, β, γ sono legate fra loro dalla relazione:

$$\beta^3 + 4\alpha\beta + 8\gamma = 0, \tag{10}$$

sicchè due soltanto di esse restano arbitrarie.

La (8) ammette sempre un'integrale uniforme di seconda specie, il quale diviene entro il parallelogrammo infinito del primo ordine in zero. Quest'integrale è quindi della forma:

$$\frac{\sigma(x-\varepsilon)}{\sigma(x)}\, e^{[Z(\varepsilon)+\lambda]x},$$

ove ε e λ sono due costanti da determinarsi.

Sostituendo questa espressione nella (8), si hanno per la determinazione di ε e λ le due relazioni:

$$\lambda = -\frac{\beta}{4}$$

$$p(\varepsilon) + \alpha + \frac{3\beta^2}{16} = 0.$$

Abbiamo quindi entro il parallelogrammo due valori per ε, che potremo indicare con ε_1 e ε_2, essendo $\varepsilon_2 = 2\omega + 2\omega' - \varepsilon_1$. Questi due valori di ε ci danno i due integrali di seconda specie:

$$u_1 = \frac{\sigma(x-\varepsilon_1)}{\sigma(x)}\, e^{\left[Z(\varepsilon_1) - \frac{\beta}{4}\right]x}$$

$$u_2 = \frac{\sigma(x+\varepsilon_1)}{\sigma(x)}\, e^{-\left[Z(\varepsilon_1) + \frac{\beta}{4}\right]x}.$$

Nel caso che i due valori di ε vengano a coincidere, il che accade quando risulta:

$$\varepsilon_1 = \omega, \qquad \varepsilon_1 = \omega', \qquad \varepsilon_1 = \omega + \omega',$$

si ha un solo integrale uniforme u_1 di seconda specie. È facile però vedere che anche in questo caso di eccezione la (8) ha sempre due integrali uniformi in tutto il piano, cioè, oltre all'integrale u_1, ve ne è un altro, il quale non è di seconda specie.

Infatti sieno y_1, y_2, y_3 tre integrali distinti della (8), i quali, quando colla x si gira nel senso positivo attorno al punto zero, subiscano la sostituzione:

$$T = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \delta & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

essendo δ una costante determinata differente da zero.

Per quello che abbiamo dimostrato nel capitolo precedente, sappiamo che l'integrale y_1 deve essere uniforme in tutto il piano. Epperò, se u_1 è il solo integrale uniforme della (8), dovremo avere:

$$u_1 = c y_1,$$

essendo c una costante determinata, ed anzi potremo prendere gl'integrali y in modo che sia $c = 1$ e $u_1 = y_1$.

Si faccia ora nella (8):

$$y = u_1 \int z\, dx;$$

si ottiene allora l'equazione del secondo ordine in z:

$$z'' + p z' + q z = 0, \tag{11}$$

la quale è pure a coefficienti ellittici, ed ammette per integrali le due funzioni uniformi in tutto il piano:

$$\left[\frac{y_2}{y_1}\right]', \qquad \left[\frac{y_3}{y_1}\right]'.$$

Quest'equazione è quindi di quelle del Picard; ma, se calcoliamo le radici della sua determinante relativa a zero, si vede che esse sono ambedue eguali a 2. Per conseguenza la (11) non può essere una equazione del Picard, e quindi la (8) deve avere due integrali uniformi u_1, u_2.

L'integrale u_2 si può ottenere dalla (11), osservando che essa ammette sempre un integrale uniforme di seconda specie z_1, per il quale si deve avere necessariamente:

$$z_1 = \left[\frac{u_2}{u_1}\right]'$$

e quindi:

$$u_2 = u_1 \int z_1 \, dx.$$

L'integrale non uniforme della (11) è dato da:

$$z_2 = z_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{z_1^2} \, dx,$$

e quindi per avere l'integrale non uniforme della (8) basterà porre:

$$u_3 = u_1 \int z_2 \, dx = u_1 \int z_1 \, dx \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{z_1^2} \, dx.$$

Si può ancora ottenere l'integrale u_2 facendo uso della formula:

$$u_2 = \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon_1},$$

nella quale si suppone dapprima la ε_1 indeterminata, eppoi si assegna ad essa il valore che deve avere. Non staremo qui a dimostrare questa formula, la quale del resto si ottiene assai facilmente.

Andiamo ora all'equazione (9); essa ammette un unico integrale uniforme dato da:

$$u_1 = e^{-\frac{\beta}{2}x}.$$

Per avere gli altri due integrali che non sono uniformi basta fare nella (9):

$$y = u_1 \int t \, dx.$$

Si ha allora l'equazione in t:

$$t'' - \frac{3\beta}{2} t' + \left[-2p(x) + \alpha + \frac{3\beta^2}{4}\right] t = 0, \tag{12}$$

la quale per le osservazioni già fatte sulla (11) deve essere di quelle del Picard. E ci si può accertare di questo col cambiare nella (12) la funzione incognita facendo:

$$t = w e^{\frac{3\beta}{4} x}.$$

Essa infatti si trasforma allora nella equazione:

$$w'' + \left[- 2p(x) + \alpha - \frac{9\beta^2}{16} \right] w = 0,$$

la quale non è altro che quella del LAMÉ nel caso di $n = 1$.

Quindi la (12) si integra facilmente, e ci dà due integrali t_2, t_3, in generale ambedue di seconda specie. Da quest'integrali poi si passa ai due non uniformi della (9) mediante le formule:

$$u_2 = u_1 \int t_2 \, dx, \qquad u_3 = u_1 \int t_3 \, dx.$$

Termino questo lavoro rendendo vivissime grazie all'egregio prof. VITO VOLTERRA, il quale mi ha guidato in questi studi, dandomi numerosi ed utili consigli.